۱

ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\sin x \\ \sin(x-۳\pi)=-\sin x \Rightarrow f(x)=-۵\sin x$$

پس قرار است $y=a\sin(b+x)$ برابر $y=-۵\sin x$ شود. به همین جهت می‌توانیم مقادیر $k\pi$ که $k\in\mathbb{Z}$ است را برای b قرار دهیم و متناسب با آن a را انتخاب کنیم. به عنوان مثال:

$$b=۵\pi \Rightarrow y=۵\sin(x+۵\pi)=-۵\sin x$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

مختصات نقطه A را به کمک ضابطهٔ تابع $y=-۳+۲\cos x \Rightarrow y=-۳-۲\cos(\pi+x)$ بدست می‌آوریم.

$$x=۰ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right.$$

مختصات نقطه B در واقع با فرض $x=\pi$ به صورت $B\left|\begin{matrix}\pi\\-۵\end{matrix}\right.$ بدست می‌آید.

$$A\left|\begin{matrix}۰\\-۱\end{matrix}\right. , B\left|\begin{matrix}\pi\\-۵\end{matrix}\right. \Rightarrow m_{AB}=-\frac{۴}{\pi}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=۳\cos(x-\frac{۳\pi}{۴})+۲\sin(\frac{\pi}{۴}-x)=۳\cos(\frac{۳\pi}{۴}-x)+۲\sin(\frac{\pi}{۴}-x)$$

$$=۳\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}-x)+۲\sin(\frac{\pi}{۴}-x)=-۳\sin(\frac{\pi}{۴}-x)+۲\sin(\frac{\pi}{۴}-x)=\sin(x-\frac{\pi}{۴})$$

اولاً، دقت کنید $f(۰)<۰$، ثانیاً، $f(\frac{\pi}{۴})=۰$، به طوری که تابع در تلاقی با محور عرض‌ها یک روند افزایشی دارد. پس تنها گزینه قابل قبول، گزینه ۲ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

$$۳\sin x\cos x=۱ \Rightarrow \sin x\times\cos x=\frac{۱}{۳}$$

از طرفی:

$$\tan^۲x+\cot^۲x=(\tan x+\cot)^۲-۲\tan x\cot x=(\tan x+\cot x)^۲-۲=(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x})^۲-۲$$

$$\Rightarrow \tan^۲x+\cot^۲x=(\frac{۱}{\sin x\cos x})^۲-۲=۷$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

$$\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}=۲\Rightarrow ۱-\cos x=۲+۲\cos x\Rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۳}$$

از طرفی:

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-x)=\cot x$$
$$\cot(\pi-x)=-\cot x \Rightarrow \text{عبارت}=\frac{۲\cot x}{-\tan x}$$
$$\cot(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\tan x$$
$$\tan(۲\pi-x)=-\tan x$$

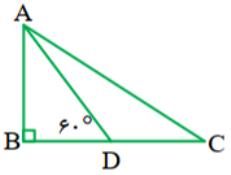
با توجه به آن‌که $\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x\Rightarrow \tan^۲ x=۸$ ، x در ناحیه دوم است، پس: $\tan x=-۲\sqrt{۲}$

$$\text{عبارت}=\frac{-۲}{\tan^۲ x}=\frac{-۲}{۸}=-\frac{۱}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶

با توجه به آن‌که پاره‌خط AD نیمساز است، پس:



$$\hat{A}_۱=\hat{A}_۲=۳۰^\circ\Rightarrow \hat{C}=۳۰^\circ$$
$$A\hat{B}C:\tan\hat{C}=\frac{AB}{BD+DC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{AB}{BD+۳۰}$$
$$A\hat{B}D:\tan\hat{D}=\frac{AB}{BD}\Rightarrow AB=\sqrt{۳}BD$$
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\sqrt{۳}BD}{BD+۳۰}\Rightarrow ۳BD=BD+۳۰\Rightarrow BD=۱۵$$
$$\Rightarrow AB=۱۵\sqrt{۳}$$

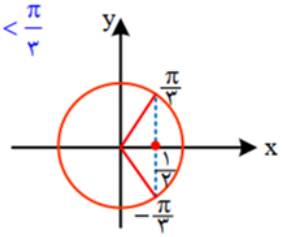
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷

ابتدا حدود x را به دست می‌آوریم:

$$-\frac{\pi}{۹}<x<\frac{\pi}{۹}\Rightarrow -\frac{\pi}{۳}<۳x<\frac{\pi}{۳}$$

حال به دایرهٔ مثلثاتی مقابل دقت کنید.

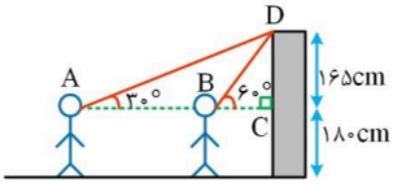


$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۲}\le ۱\Rightarrow ۱<m-۱\le ۲\Rightarrow ۲<m\le ۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸

$$\tan ۳۰^\circ=\frac{DC}{AC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱۶۵}{AC}\Rightarrow AC=۱۶۵\sqrt{۳}$$
$$\tan ۶۰^\circ=\frac{DC}{BC}\Rightarrow\sqrt{۳}=\frac{۱۶۵}{BC}\Rightarrow BC=۵۵\sqrt{۳}$$
$$AB=AC-BC=۱۶۵\sqrt{۳}-۵۵\sqrt{۳}=۱۱۰\sqrt{۳}$$
$$AB=۱۱۰\sqrt{۳}\xrightarrow{\sqrt{۳}=۱/۷۳}AB=۱۱۰\times ۱/۷۳\simeq ۱۹۰cm=۱/۹m$$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹

$$۰ \le \sin^۲ x \le ۱ \Rightarrow -۲ \le -۲\sin^۲ x \le ۰ \Rightarrow ۱ \le A \le ۳$$

$$-۱ \le \cos^۳ x \le ۱ \Rightarrow ۲ \le ۳ + \cos^۳ x \le ۴$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۴} \le \frac{۱}{۳+\cos^۳ x} \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۹}{۴} \le B \le \frac{۹}{۲}$$

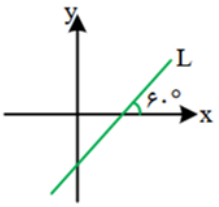
$$\begin{matrix} \min A = ۱ \\ \max B = ۴/۵ \end{matrix} \Rightarrow \max B + \min A = ۵/۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰

چون خط L با قسمت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ ۶۰° می‌سازد پس شیب آن برابر $m = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ است، همچنین از نقطهٔ $(-۱, -۲\sqrt{۳})$ می‌گذرد، پس معادلهٔ خط L به صورت زیر است:

$$y + ۲\sqrt{۳} = \sqrt{۳}(x+۱) \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - \sqrt{۳}$$



حال معادلهٔ خط L را با خط $۳y + \sqrt{۳}x = ۲ + \sqrt{۳}$ قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = \sqrt{۳}x - \sqrt{۳} \\ ۳y = -\sqrt{۳}x + \sqrt{۳} + ۲ \end{cases} \Rightarrow ۴y = ۲ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱

با توجه به آن‌که $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ داریم:

$$۱ - \cos^۲ x + \cos x = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \cos^۲ x - \cos x + \frac{۱}{۴} = ۰$$

$$(\cos x - \frac{۱}{۲})^۲ = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

حال در عبارت $\cos^۲ x + \sin x$ مقادیر بدست آمده را جایگزین می‌کنیم.

$$\cos^۲ x + \sin x = \frac{۱}{۴} \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱ \pm ۲\sqrt{۳}}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

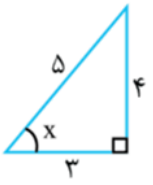
۱۲ ابتدا فرض مسئله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{=1}+2\cos x+1}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{2\cos x+2}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}=\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{2}{\sin x}=\frac{5}{2}\Rightarrow\sin x=\frac{4}{5}$$

می‌دانیم که $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ است، پس $\cos x<0$ و $\tan x<0$ است، لذا:

$$\sin x=\frac{4}{5}\Rightarrow\begin{cases}\cos x=-\frac{3}{5}\\ \tan x=-\frac{4}{3}\\ \cot x=-\frac{3}{4}\end{cases}$$



$$\Rightarrow\frac{\sin x+\cos x}{\tan x-\cot x}=\frac{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{7}{12}}=-\frac{12}{35}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳ در ابتدا داریم:

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\sin^2 30^\circ=1$$

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow 2\cos^2 45^\circ=1$$

از طرفی:

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Rightarrow\sqrt{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{|\cos\theta|}$$

$$1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}\Rightarrow\sqrt{1+\cot^2\theta}=\frac{1}{|\sin\theta|}$$

با توجه به اینکه $180^\circ<\theta<270^\circ$، پس: $\cos\theta<0$ و $\sin\theta<0$

$$=\frac{\sin\theta}{\frac{-1}{\cos\theta}}-\frac{\cos\theta}{\frac{-1}{\sin\theta}}=-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta=0$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

$$A=\frac{(\sin x-\frac{1}{\sin x})(\cos x-\frac{1}{\cos x})}{\sin^4 x+\cos^4 x-1}=\frac{(\frac{\sin^2 x-1}{\sin x})(\frac{\cos^2 x-1}{\cos x})}{1-2\sin^2 x\cos^2 x-1}=\frac{\frac{-\cos^2 x}{\sin x}\times\frac{-\sin^2 x}{\cos x}}{-2\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin x\cos x}{-2\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{-2\sin x\cos x}$$

$$B=\tan x+\cot x=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{\frac{1}{-2\sin x\cos x}}=\frac{-2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}=-2$$

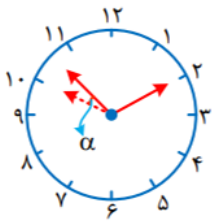
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

محیط دایره به وسیلهٔ اعداد ساعت‌ها به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم شده است. بنابراین زاویهٔ بین هر دو ساعت متوالی برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{۱۲}=۳۰^\circ$ است.

اگر عقربهٔ ساعت‌شمار بر روی عدد ۱۰ و دقیقه‌شمار بر روی عدد ۲ باشد، زاویهٔ بین این دو برابر ۱۲۰° است.

اما در ساعت $۱۰:۱۰'$، عقربهٔ ساعت‌شمار بر روی عدد ۱۰ قرار ندارد و α درجه جلوتر می‌رود.



عقربهٔ ساعت شمار	عقربهٔ دقیقه شمار
۳۰°	۶۰ دقیقه
$\alpha=۵^\circ$	۱۰ دقیقه

بنابراین، زاویهٔ بین دو عقربه برابر $۱۲۰^\circ-۵^\circ=۱۱۵^\circ$ است.

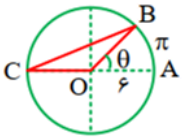
طول کمان	زاویهٔ کمان
$۲\pi r=۳۶\pi$	۳۶۰°
$x=\frac{۱۱۵\times۳۶\pi}{۳۶۰}=۱۱/۵\pi$	۱۱۵°

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶

روش اول:

می‌دانیم طول کمان AB روبه‌رو به زاویهٔ θ برابر $r\theta$ می‌باشد.



$$۶\theta=\pi\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۶}$$

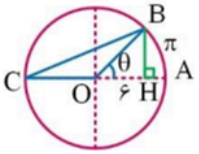
بنابراین در مثلث $\overset{\triangle}{BOC}$ زاویه $\hat{O}$ برابر $\frac{۵\pi}{۶}$ می‌باشد.

خواهیم داشت:

$$S_{\overset{\triangle}{BOC}}=\frac{۱}{۲}OB\times OC\times\sin\hat{O}=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶\times\sin\frac{۵\pi}{۶}=۱۸\times\frac{۱}{۲}=۹$$

روش دوم:

زاویهٔ θ برابر $\frac{\pi}{۶}$ است.



$$BH=OB\times\sin\frac{\pi}{۶}=۶\times\frac{۱}{۲}=۳$$

$$S_{\overset{\triangle}{BOC}}=\frac{BH\times OC}{۲}=\frac{۳\times۶}{۲}=۹$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

با توجه به آن‌که $y_M=\frac{۳}{۵}$ پس از $M\begin{vmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{vmatrix}$، می‌فهمیم که $\sin\theta=\frac{۳}{۵}$ و $\cos\theta=\frac{-۴}{۵}$، اما:

$$N\begin{vmatrix}\cos(\theta+۹۰^\circ)\\ \sin(\theta+۹۰^\circ)\end{vmatrix}\Rightarrow N\begin{vmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{vmatrix}\Rightarrow N\begin{vmatrix}-\frac{۳}{۵}\\ -\frac{۴}{۵}\end{vmatrix}$$

$$M\begin{vmatrix}-\frac{۴}{۵}\\ \frac{۳}{۵}\end{vmatrix},N\begin{vmatrix}-\frac{۳}{۵}\\ -\frac{۴}{۵}\end{vmatrix},A\begin{vmatrix}۱\\ ۰\end{vmatrix}\Rightarrow AN=\sqrt{\frac{۶۴}{۲۵}+\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴\sqrt{۵}}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸ توجه شود که طبق روابط زوایای متمم داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cos\alpha\ ,\ \cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha\ ,\ \cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\tan\alpha$$

$$A=\frac{۱-\cos۱۰^\circ-\cos^۲۵۵^\circ-\cos^۲۳۵^\circ}{\cot۵۵^\circ\cot۳۵^\circ-۱-۲\sin۸۰^\circ}=\frac{۱-\cos۱۰^\circ-(\cos^۲۵۵^\circ+\sin^۲۵۵^\circ)}{\cot۵۵^\circ\tan۵۵^\circ-۱-۲\cos۱۰^\circ}=\frac{۱-\cos۱۰^\circ-۱}{۱-۱-۲\cos۱۰^\circ}=\frac{-\cos۱۰^\circ}{-۲\cos۱۰^\circ}=\frac{۱}{۲}$$

$$B=\sin\frac{۱۷\pi}{۴}+\sin\frac{۱۹\pi}{۴}+\sin\frac{۲۱\pi}{۴}=\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۴})+\sin(۵\pi-\frac{\pi}{۴})+\sin(۵\pi+\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}+(-\sin\frac{\pi}{۴})=\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹ ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\cos(۵\pi-x)=\cos(\pi-x)=-\cos x$$

$$\sin(x-\frac{۱۱\pi}{۲})=\sin(x-\frac{۳\pi}{۲})=-\sin(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-(-\cos x)=\cos x$$

$$\sin(۷\pi+x)=\sin(\pi+x)=-\sin x$$

$$\cos(x+\frac{۹\pi}{۲})=\cos(x+\frac{\pi}{۲})=-\sin x$$

حال عبارت داده شده را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\cos(۵\pi-x)-\sin(x-\frac{۱۱\pi}{۲})}{\sin(۷\pi+x)+\cos(x+\frac{۹\pi}{۲})}=\frac{-\cos x-\cos x}{-\sin x-\sin x}=\frac{-۲\cos x}{-۲\sin x}=\cot x$$

از طرفی می‌دانیم $\sin x=\frac{۲}{۳}$ است. حال به کمک رابطه $۱+\cot^۲x=\frac{۱}{\sin^۲x}$ داریم:

$$۱+\cot^۲x=\frac{۱}{(\frac{۲}{۳})^۲}\Rightarrow ۱+\cot^۲x=\frac{۹}{۴}\Rightarrow\cot^۲x=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\cot x=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

با توجه به فرض $|\cos x|>\cos x$، می‌توان فهمید که $\cos x<۰$ است و چون $\sin x=\frac{۲}{۳}$ بوده و مثبت است پس انتهای کمان x در ناحیه دوم مثلثاتی است و می‌دانیم که در ناحیه دوم مثلثاتی، $\cot x<۰$ است، لذا $\cot x=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰ ابتدا انتقال‌های گفته شده را روی تابع f اعمال می‌کنیم:

$$g(x)=f(x+\frac{۳\pi}{۲})-۲\Rightarrow f(x+\frac{۳\pi}{۲})=۲\cos x+۲$$

با فرض $x+\frac{۳\pi}{۲}=t$ داریم:

$$f(t)=۲\cos(t-\frac{۳\pi}{۲})+۲\Rightarrow f(t)=-۲\sin t+۲\Rightarrow f(x)=-۲\sin x+۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱ چون تابع خطی f با قسمت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ حادهٔ θ می‌سازد، پس شیب آن برابر $\tan\theta$ است، یعنی $m=\tan\theta$ است. حال چون $\cos\theta=\frac{۴}{۵}$ است، پس می‌توانیم مقدار $\tan\theta$ را بیابیم:

$$۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow ۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\frac{۱۶}{۲۵}}\Rightarrow \tan^۲\theta=\frac{۲۵}{۱۶}-۱$$

$$\tan^۲\theta=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow \tan\theta=\pm\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\theta\text{ حاده است}}\tan\theta=\frac{۳}{۴}\Rightarrow m=\frac{۳}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله تابع f}} y=\frac{۳}{۴}x+۱\Rightarrow \frac{۳}{۴}x=y-۱\Rightarrow x=\frac{۴}{۳}y-\frac{۴}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ضابطه وارون}} f^{-۱}(x)=\frac{۴}{۳}x-\frac{۴}{۳}\Rightarrow \text{ضابطهٔ وارون}: y=\frac{۴}{۳}x-\frac{۴}{۳}$$

$$\text{فاصلهٔ A از خط}: d_۱=\frac{\left|-\frac{۳}{۴}-۳+۱\right|}{\sqrt{(\frac{۳}{۴})^۲+۱}}=\frac{\left|-\frac{۱۱}{۴}\right|}{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}}=\frac{\frac{۱۱}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۱۱}{۵}$$

$$\text{فاصلهٔ A از خط}: d_۲=\frac{\left|-\frac{۴}{۳}-۳-\frac{۴}{۳}\right|}{\sqrt{۱+(\frac{۴}{۳})^۲}}=\frac{\left|-\frac{۱۷}{۳}\right|}{\sqrt{\frac{۲۵}{۹}}}=\frac{\frac{۱۷}{۳}}{\frac{۵}{۳}}=\frac{۱۷}{۵}$$

پس $\frac{d_۱}{d_۲}=\frac{۱۱}{۱۷}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲ معادله را ساده می‌کنیم:

$$(\sin\alpha>۰,\cos\alpha<۰)$$

$$\log(\sin\alpha)-\log(-\cos\alpha)=\log ۳\Rightarrow \log(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})=\log ۳\Rightarrow \log(-\tan\alpha)=\log ۳\Rightarrow \tan\alpha=-۳$$

خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha=۱+۹=۱۰\Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۱}{۱۰}\xrightarrow{\cos\alpha<۰}\cos\alpha=\frac{-\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

بنابراین:

$$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}-(-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰})=\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳ ابتدا تک‌تک نسبت‌های داده شده را به کمک روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ساده می‌کنیم:

$$\sin(۱۰۵^\circ)=\sin(۹۰^\circ+۱۵^\circ)=\cos ۱۵^\circ$$
$$\cos ۲۵۵^\circ=\cos(۲۷۰^\circ-۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$
$$\cos ۱۶۵^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۱۵^\circ)=-\cos ۱۵^\circ$$
$$\sin ۱۹۵^\circ=\sin(۱۸۰^\circ+۱۵^\circ)=-\sin ۱۵^\circ$$

حال عبارت‌های ساده شده را جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\cos ۱۵^\circ-k\sin ۱۵^\circ}{-\cos ۱۵^\circ-۲\sin ۱۵^\circ}=۳\xrightarrow[\text{بر } -\cos ۱۵^\circ \text{ تقسیم می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}\frac{-۱+k\tan ۱۵^\circ}{۱+۲\tan ۱۵^\circ}=۳\Rightarrow -۱+\frac{k}{۴}=۳+۶\times\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{۴}=\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow k=۲۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{\frac{۳\pi}{۸}}{\pi}\Rightarrow D=\frac{۳\times۱۸۰^\circ}{۸}=۶۷/۵^\circ$$

$$\alpha+۳۷/۵^\circ+۶۷/۵^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow\alpha=۱۸۰^\circ-۱۰۵^\circ=۷۵^\circ$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{۵\pi}{۱۲}\ \text{رادیان}$$

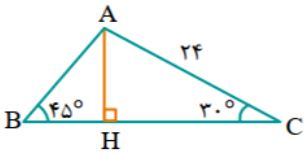
$$\text{طول کمان } L=R.\alpha\Rightarrow L=۶۰\times\frac{۵\pi}{۱۲}=۲۵\pi$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵

اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$\triangle AHC:\sin۳۰^\circ=\frac{AH}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{AH}{۲۴}\Rightarrow AH=۱۲$$



$$\triangle AHC:\tan۳۰^\circ=\frac{AH}{HC}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱۲}{HC}\Rightarrow HC=۱۲\sqrt{۳}$$

$$\triangle ABH:\tan۴۵^\circ=\frac{AH}{BH}\Rightarrow۱=\frac{۱۲}{BH}\Rightarrow BH=۱۲$$

$$BC=BH+HC=۱۲+۱۲\sqrt{۳}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times۱۲\times(۱۲+۱۲\sqrt{۳})=\frac{۱}{۲}\times۱۴۴(۱+\sqrt{۳})=۷۲(۱+\sqrt{۳})$$

$$\triangle ABH:\cos۴۵^\circ=\frac{BH}{AB}\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱۲}{AB}\Rightarrow AB=۱۲\sqrt{۲}$$

$$\frac{S}{AB}=\frac{۷۲(۱+\sqrt{۳})}{۱۲\sqrt{۲}}=۳\sqrt{۲}(۱+\sqrt{۳})=۳(\sqrt{۲}+\sqrt{۶})$$

بنابراین، $a=۲$ و $b=۶$ و در نتیجه $a+b=۸$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶

چون نقطهٔ A روی خط $x+۵y=۰$ و در ناحیهٔ دوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس مختصات نقطه A به صورت $A(x,-\frac{۱}{۵}x)$ با شرط $x<۰$ است.

$$\begin{cases}x=\cos\alpha\\ y=\sin\alpha\end{cases}\Rightarrow x^۲+y^۲=\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha=۱\Rightarrow x^۲+(-\frac{۱}{۵}x)^۲=۱$$

$$\Rightarrow x^۲+\frac{۱}{۲۵}x^۲=۱\Rightarrow\frac{۲۶}{۲۵}x^۲=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۲۵}{۲۶}\xrightarrow{x<۰}x=-\frac{۵}{\sqrt{۲۶}}$$

$$\Rightarrow\cos\alpha=-\frac{۵}{\sqrt{۲۶}}\Rightarrow y=\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}$$

همچنین با دقت در شکل مشخص می‌شود که $\beta=\pi+\alpha$ و از طرفی، چون شیب خط $x+۵y=۰$ برابر $m=-\frac{۱}{۵}$ است، پس $\tan\alpha=-\frac{۱}{۵}$ و در نتیجه داریم:

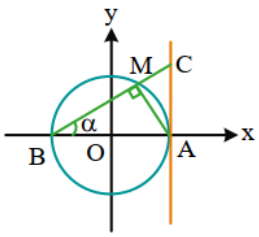
$$\tan\beta=\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha=-\frac{۱}{۵}\Rightarrow\cot\beta=-۵$$

پس حاصل عبارت مطلوب برابر است با:

$$\frac{۶\sin\alpha-۴\cos\alpha}{۵\tan\beta+۲\cot\beta}=\frac{\frac{۶}{\sqrt{۲۶}}+\frac{۲۰}{\sqrt{۲۶}}}{-۱-۱۰}=\frac{\frac{۲۶}{\sqrt{۲۶}}}{-۱۱}=\frac{\sqrt{۲۶}}{-۱۱}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷



$$\hat{ABC}: \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{۲}{BC} \Rightarrow BC = \frac{۲}{\cos\alpha}$$

$$\hat{ABM}: \cos\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{BM}{۲} \Rightarrow BM = ۲\cos\alpha$$

$$MC = BC - BM = \frac{۲}{\cos\alpha} - ۲\cos\alpha = ۲\left(\frac{۱}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$$

$$= ۲\left(\frac{۱-\cos^۲\alpha}{\cos\alpha}\right) = ۲\left(\frac{\sin^۲\alpha}{\cos\alpha}\right) = ۲\times\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\sin\alpha = ۲\tan\alpha\sin\alpha$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸

$$S = \frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A} \Rightarrow ۳۶ = \frac{۱}{۲}\times\sqrt{۴۸}\times۱۲\times\sin\alpha$$

$$\Rightarrow ۳۶ = \frac{۱}{۲}\times۴\sqrt{۳}\times۱۲\times\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha = ۶۰^\circ \text{ یا } ۱۲۰^\circ \quad (\alpha = \frac{\pi}{۳} \text{ یا } \frac{۲\pi}{۳})$$

اگر $\alpha = \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\tan۲\alpha - \cos\alpha}{\cot\frac{\alpha}{۲} - \sin۴\alpha} = \frac{\tan\frac{۲\pi}{۳} - \cos\frac{\pi}{۳}}{\cot\frac{\pi}{۶} - \sin\frac{۴\pi}{۳}} = \frac{\tan(\pi - \frac{\pi}{۳}) - \cos\frac{\pi}{۳}}{\cot\frac{\pi}{۶} - \sin(\pi + \frac{\pi}{۳})}$

$$= \frac{-\tan\frac{\pi}{۳} - \cos\frac{\pi}{۳}}{\cot\frac{\pi}{۶} + \sin\frac{\pi}{۳}} = \frac{-\sqrt{۳} - \frac{۱}{۲}}{\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-\sqrt{۳} - \frac{۱}{۲}}{\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۲\sqrt{۳} - ۱}{۳\sqrt{۳}} = \frac{-۶ - \sqrt{۳}}{۹}$$

اگر $\alpha = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{\tan۲\alpha - \cos\alpha}{\cot\frac{\alpha}{۲} - \sin۴\alpha} = \frac{\tan\frac{۴\pi}{۳} - \cos\frac{۲\pi}{۳}}{\cot\frac{\pi}{۳} - \sin\frac{۸\pi}{۳}} = \frac{\tan(\pi + \frac{\pi}{۳}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{۳})}{\cot\frac{\pi}{۳} - \sin(۳\pi - \frac{\pi}{۳})}$

$$= \frac{\tan\frac{\pi}{۳} + \cos\frac{\pi}{۳}}{\cot\frac{\pi}{۳} - \sin\frac{\pi}{۳}} = \frac{\sqrt{۳} + \frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۲\sqrt{۳} + ۱}{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = -۶ - \sqrt{۳}$$

بیشترین مقدار عبارت مطلوب برابر $\frac{-۶-\sqrt{۳}}{۹}$ و کمترین مقدار آن $-۶-\sqrt{۳}$ است که نسبت آن‌ها برابر $\frac{۱}{۹}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

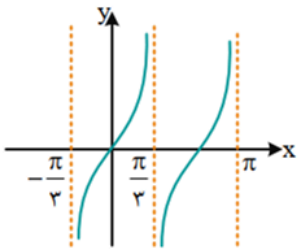
۲۹ تابع $f(x)=\tan x$ در نقاط $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ تعریف نشده است و بنابراین داریم:

$$-\frac{x}{۳}+\frac{\pi}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow -\frac{x}{۳}=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=-۳k\pi-\frac{۳\pi}{۴}$$

اولین جواب منفی برای x به ازای $k=۰$ برابر $x=-\frac{۳\pi}{۴}$ است و اولین جواب مثبت برای x به ازای $k=-۱$ برابر $x=\frac{۹\pi}{۴}$ است، پس $a=\frac{-۳\pi}{۴}$ و $b=\frac{۹\pi}{۴}$ است و بنابراین داریم:

$$g(x)=\tan(\frac{-b}{۲a}x)=\tan\left(\frac{-\frac{۹\pi}{۴}}{۲(-\frac{۳\pi}{۴})}x\right)=\tan(\frac{۳}{۲}x)$$

نمودار تابع $g(x)=\tan(\frac{۳}{۲}x)$ با استفاده از انقباض نمودار تابع $y=\tan x$ به صورت زیر قابل رسم است. (از ضرب طول تمام نقاط نمودار تابع $y=\tan x$ در $\frac{۲}{۳}$، نمودار تابع g به دست می‌آید) طبق شکل، تابع g در بازهٔ $(\frac{\pi}{۳},\pi)$ اکیداً صعودی است.



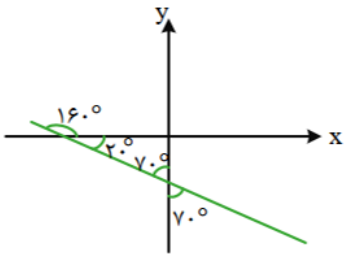
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰ چون زاویه خط با قسمت مثبت محور طول‌ها برابر ۱۶۰°است، پس شیب خط برابر $\tan ۱۶۰^\circ$ خواهد بود، یعنی داریم:

$$۶x+۱۵y+۲۲=۰\Rightarrow m=-\frac{۶}{۱۵}=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow \tan ۱۶۰^\circ=-\frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \tan(\pi-۲۰^\circ)=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow -\tan ۲۰^\circ=-\frac{۲}{۵}\Rightarrow \tan ۲۰^\circ=\frac{۲}{۵}$$

حال، حاصل عبارت مطلوب برابر است با:



$$A=\frac{\sin ۶۱۰^\circ-\sin ۸۸۰^\circ}{\cos ۲۰۰^\circ-\cos ۴۷۰^\circ}+\cot ۱۱۰^\circ=\frac{\sin(\frac{۷\pi}{۲}-۲۰^\circ)-\sin(۵\pi-۲۰^\circ)}{\cos(\pi+۲۰^\circ)-\cos(\frac{۵\pi}{۲}+۲۰^\circ)}+\cot(\frac{\pi}{۲}+۲۰^\circ)$$

$$A=\frac{-\cos ۲۰^\circ-\sin ۲۰^\circ}{-\cos ۲۰^\circ+\sin ۲۰^\circ}-\tan ۲۰^\circ=\frac{-۱-\tan ۲۰^\circ}{-۱+\tan ۲۰^\circ}-\tan ۲۰^\circ$$

$$=\frac{-۱-\frac{۲}{۵}}{-۱+\frac{۲}{۵}}-\frac{۲}{۵}=\frac{-\frac{۷}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}-\frac{۲}{۵}=\frac{۷}{۳}-\frac{۲}{۵}=\frac{۲۹}{۱۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱ طبق شکل، دوره تناوب تابع برابر $T=\frac{\pi}{۲}-(\frac{-۵\pi}{۲})=۳\pi$ و ماکزیمم و مینیمم تابع به ترتیب برابر ۲ و ۶− است. پس داریم:

$$\frac{۲\pi}{|b|}=۳\pi\Rightarrow|b|=\frac{۲}{۳}$$

$$\begin{cases}|a|+c=۲\\-|a|+c=-۶\end{cases}\Rightarrow c=-۲\ ,\ |a|=۴$$

چون $f(۰)>۰$، پس $a=۴$ قابل قبول است و چون $f(\frac{\pi}{۲})<۰$، پس $b=-\frac{۲}{۳}$ قابل قبول است، بنابراین داریم:

$$f(x)=۴\sin(-\frac{۲}{۳}x+\frac{\pi}{۳})-۲\Rightarrow f(\frac{۲۱\pi}{۴})=۴\sin(-\frac{۲}{۳}\times\frac{۲۱\pi}{۴}+\frac{\pi}{۳})-۲$$

$$=۴\sin(-\frac{۷\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳})-۲=۴\cos\frac{\pi}{۳}-۲=۴(\frac{۱}{۲})-۲=۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲ $$\frac{۴\sin^۲\theta-۲}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{۷}\xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}}\frac{۲\sin^۲\theta-۱}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

$$\frac{\sin^۲\theta+\sin^۲\theta-۱}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\Rightarrow\frac{\sin^۲\theta-\cos^۲\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\Rightarrow\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\quad(۱)$$

از طرفی، می‌دانیم $\tan\theta+\cot\theta=\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta}$، پس می‌توان حاصل عبارت مطلوب را به صورت زیر به دست آورد:

$$\tan^۳\theta+\cot^۳\theta=(\tan\theta+\cot\theta)(\tan^۲\theta-\tan\theta\cot\theta+\cot^۲\theta)$$

$$=(\tan\theta+\cot\theta)\Big((\tan\theta+\cot\theta)^۲-۲\tan\theta\cot\theta-\tan\theta\cot\theta)\Big)$$

$$=(\tan\theta+\cot\theta)\Big((\tan\theta+\cot\theta)^۲-۳\Big)=(\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta})\Big((\frac{۱}{\sin\theta\cos\theta})^۲-۳\Big)\quad(۲)$$

از طرفی، اگر طرفین رابطه (۱) را به توان ۲ برسانیم، خواهیم داشت:

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{۷}}{۲}\Rightarrow\sin^۲\theta+\cos^۲\theta+۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۷}{۴}$$

$$\Rightarrow۱+۲\sin\theta\cos\theta=\frac{۷}{۴}\Rightarrow\sin\theta\cos\theta=\frac{۳}{۸}$$

حال، طبق رابطه (۲) حاصل عبارت مطلوب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tan^۳\theta+\cot^۳\theta=(\frac{۸}{۳})(\frac{۶۴}{۹}-۳)=\frac{۸}{۳}\times\frac{۳۷}{۹}=\frac{۲۹۶}{۲۷}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳ ابتدا α را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan\alpha=\frac{\cos۱۰^\circ}{۱-\sin۱۰^\circ}=\frac{\sin۸۰^\circ}{۱-\cos۸۰^\circ}=\frac{۲\sin۴۰^\circ\cos۴۰^\circ}{۲\sin^۲۴۰^\circ}=\frac{\cos۴۰^\circ}{\sin۴۰^\circ}=\cot۴۰^\circ=\tan۵۰^\circ\Rightarrow\alpha=۵۰^\circ$$

خواهیم داشت:

$$\tan۳\alpha=\tan۱۵۰^\circ=-\tan۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin x-\cos x+\sin ۲x-\cos ۲x=۱\Rightarrow \sin x-\cos x+۲\sin x\cos x-۲\cos^۲ x+۱=۱$$

$$\Rightarrow \sin x-\cos x+۲\cos x(\sin x-\cos x)=۰$$

$$\Rightarrow (\sin x-\cos x)(۱+۲\cos x)=۰\Rightarrow \begin{cases}\sin x=\cos x\Rightarrow \begin{cases}x_۱=\frac{\pi}{۴}\\ x_۲=\frac{۵\pi}{۴}\end{cases}\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \begin{cases}x_۳=\frac{۲\pi}{۳}\\ x_۴=\frac{۴\pi}{۳}\end{cases}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=\frac{\pi}{۴}+\frac{۵\pi}{۴}+\frac{۲\pi}{۳}+\frac{۴\pi}{۳}=\frac{۷\pi}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵ اگر از فرمول مثلثاتی $\cos x=\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\cos x=\frac{۱-\frac{۱}{۴}}{۱+\frac{۱}{۴}}=\frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۳}{۵}$$

حال با استفاده از فرمول مثلثاتی $\cos ۲x=۲\cos^۲ x-۱$ خواهیم داشت:

$$\cos ۲x=۲(\frac{۳}{۵})^۲-۱=۲(\frac{۹}{۲۵})-۱=\frac{-۷}{۲۵}$$

$$\cos ۴x=۲\cos^۲ ۲x-۱=۲(-\frac{۷}{۲۵})^۲-۱=۲(\frac{۴۹}{۶۲۵})-۱=-\frac{۵۲۷}{۶۲۵}$$

همچنین اگر از فرمول مثلثاتی $\tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\tan x=\frac{۲\times\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

$$\tan ۲x=\frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}=\frac{\frac{۸}{۳}}{۱-\frac{۱۶}{۹}}=\frac{\frac{۸}{۳}}{-\frac{۷}{۹}}=-\frac{۲۴}{۷}\Rightarrow \cot ۲x=\frac{-۷}{۲۴}$$

$$A=۲۵\cos ۴x-۲۴\cot ۲x=۲۵(-\frac{۵۲۷}{۶۲۵})-۲۴(-\frac{۷}{۲۴})=-\frac{۵۲۷}{۲۵}+۷=-\frac{۳۵۲}{۲۵}=-\frac{۱۴۰۸}{۱۰۰}=-۱۴/۰۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶

$$f(x)=-۲\sin(ax-\frac{\pi}{۲})+b \Rightarrow f(x)=۲\sin(\frac{\pi}{۲}-ax)+b$$

$$f(x)=۲\cos(ax)+b \Rightarrow f(۰)=۱ \Rightarrow ۲+b=۱ \Rightarrow b=-۱$$

از طرفی، نمودار تابع در فواصلی به طول ۳π تکرار می‌شود، پس دوره تناوب تابع برابر ۳π است. یعنی داریم:

$$f(x)=۲\cos(ax)-۱ \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|a|}=۳\pi \Rightarrow |a|=\frac{۲}{۳} \Rightarrow a=\pm\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x)=۲\cos(\pm\frac{۲}{۳}x)-۱$$

$$\Rightarrow f(۲\pi)=۲\cos(\pm\frac{۲}{۳}(۲\pi))-۱ \Rightarrow f(۲\pi)=۲\cos(\pm\frac{۴\pi}{۳})-۱$$

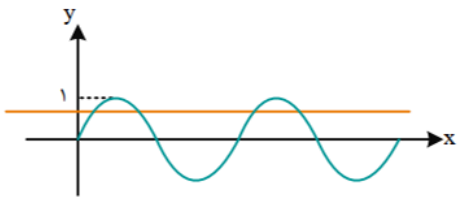
$$\Rightarrow f(۲\pi)=۲(-\frac{۱}{۲})-۱=-۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

$$\tan x+\cot x=\sqrt{۵} \Rightarrow \frac{۲}{\sin ۲x}=\sqrt{۵} \Rightarrow \sin ۲x=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

چون $\frac{۲}{\sqrt{۵}}<۱$، بنابراین معادلهٔ $\sin ۲x=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ جواب دارد. برای یافتن تعداد جواب‌ها کافی است نمودار تابع $f(x)=\sin ۲x$ را با خط $y=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ قطع دهیم.



همانطور که از روی شکل مشخص است، نمودار تابع $f(x)=\sin ۲x$ با خط $y=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای ۴ نقطهٔ تلاقی است، پس معادله دارای ۴ جواب است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

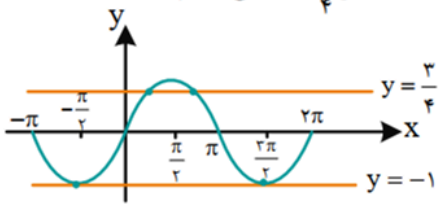
۳۸

اگر از فرمول‌های مثلثاتی $(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲=۱+\sin ۲\alpha$ و $\cos ۲\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$(\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲})^۲=۲+۲\cos ۲x \Rightarrow ۱+\sin x=۲+۲(۱-۲\sin^۲ x)$$

$$\Rightarrow ۱+\sin x=۲+۲-۴\sin^۲ x \Rightarrow ۴\sin^۲ x+\sin x-۳=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases}\sin x=-۱\\ \sin x=\frac{۳}{۴}\end{cases}$$

برای یافتن تعداد جواب‌های معادله در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را با خطوط $y=-۱$ و $y=\frac{۳}{۴}$ قطع دهیم:



همانطور که از روی شکل مشخص است تعداد نقاط تلاقی برابر ۴ نقطه است، پس معادله دارای ۴ جواب در بازهٔ $[-\pi,۲\pi]$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

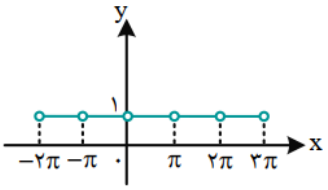
۳۹ ابتدا ضابطهٔ هر یک از توابع f و g را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\cos^{۴}\frac{۲\pi x}{۳}-\sin^{۴}\frac{۲\pi x}{۳}=(\cos^{۲}\frac{۲\pi x}{۳}+\sin^{۲}\frac{۲\pi x}{۳})(\cos^{۲}\frac{۲\pi x}{۳}-\sin^{۲}\frac{۲\pi x}{۳})$$

$$f(x)=۱\times\cos\frac{۴\pi x}{۳}=\cos\frac{۴\pi x}{۳}\Rightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{۴\pi}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

$$g(x)=\frac{\sin^{۲}x}{۱-\cos^{۲}x}=\frac{\sin^{۲}x}{\sin^{۲}x}=۱\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{x|x=k\pi\}$$

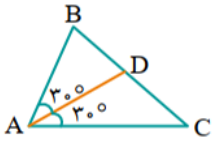
نمودار تابع g که تابعی ثابت است به صورت زیر می‌باشد. پس دورهٔ تناوب تابع برابر π می‌باشد زیرا نمودار تابع در فواصلی به طول π تکرار می‌شود.
پس خواهیم داشت: $T_۲=\pi$.



$$\frac{T_۱}{T_۲}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\pi}=\frac{۳}{۲\pi}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰



می‌دانیم: $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}AB\times AD\times\sin۳۰^\circ+\frac{۱}{۲}AC\times AD\times\sin۳۰^\circ=۶۰$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}AD\times\sin۳۰^\circ(AB+AC)=۶۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}AD\times\frac{۱}{۲}\times۶۰=۶۰\Rightarrow AD=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱ می‌دانیم مختصات نقطهٔ A در دایرهٔ مثلثاتی به صورت $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ می‌باشد. بنابراین:

$$\sin\alpha=-\cot\alpha\Rightarrow\sin\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\Rightarrow\sin^{۲}\alpha=-\cos\alpha\Rightarrow۱-\cos^{۲}\alpha=-\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\cos^{۲}\alpha-\cos\alpha-۱=۰\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}\xrightarrow{\cos\alpha<۰}\cos\alpha=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲ دو طرف تساوی را بر $\cos^{۲}\alpha$ تقسیم می‌کنیم:

$$\sin^{۲}\alpha-۳\sin\alpha\cos\alpha=۲\Rightarrow\tan^{۲}\alpha-۳\tan\alpha=\frac{۲}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow\tan^{۲}\alpha-۳\tan\alpha=۲(۱+\tan^{۲}\alpha)$$

$$\Rightarrow\tan^{۲}\alpha+۳\tan\alpha+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}\tan\alpha=-۱\\\tan\alpha=-۲\end{cases}\Rightarrow-۱-۲=-۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳ می‌دانیم: $\tan\alpha+\cot\alpha<۰\Rightarrow\tan\alpha+\frac{۱}{\tan\alpha}<۰\Rightarrow\tan\alpha<۰\Rightarrow$ $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ غیرهم‌علامت هستند.

از طرفی: $\sin^{۲}\alpha+\cos\alpha<۰\Rightarrow\cos\alpha<-\sin^{۲}\alpha\Rightarrow\cos\alpha<۰\Rightarrow\sin\alpha>۰$

$-۱<\cos\alpha<۰$ و $۰<\sin\alpha<۱$

خواهیم داشت:
در نتیجه گزینه ۳ نادرست است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴

$$۵x+۶x=\frac{\pi}{۲}\ ,\ ۴x+۷x=\frac{\pi}{۲}$$

$$\text{عبارت}=\frac{\cos^۲ ۶x+\sin^۲ ۶x}{۱+\tan^۲ ۴x}\times\frac{۲\sin ۴x}{\cos ۴x}=\cos^۲ ۴x\times\frac{۲\sin ۴x}{\cos ۴x}=۲\sin ۴x\cos ۴x=\sin ۸x$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵

$$f(x)=\sin^۲ x+(۱-\sin^۲ x)^۲=\sin^۴ x-\sin^۲ x+۱=(\sin^۲ x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}$$

$$۰\le\sin^۲ x\le ۱\Rightarrow-\frac{۱}{۲}\le\sin^۲ x-\frac{۱}{۲}\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۰\le(\sin^۲ x-\frac{۱}{۲})^۲\le\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۳}{۴}\le f(x)\le ۱\Rightarrow b-a=\frac{۱}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶

تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}(a+b)x+c & x\ge ۰\\ (b-a)x+c & x<۰\end{cases}$$

برای اینکه این تابع یک‌به‌یک باشد، باید شیب دو خط هم‌علامت باشند.

$$(a+b)(b-a)>۰\Rightarrow b^۲-a^۲>۰\Rightarrow b^۲>a^۲\Rightarrow|b|>|a|\Rightarrow\left|\frac{b}{a}\right|>۱$$

در تابع $y=\sin\frac{a}{b}x$ خواهیم داشت:

$$T=\frac{۲\pi}{\left|\frac{a}{b}\right|}=\left|\frac{b}{a}\right|۲\pi>۲\pi$$

تنها در گزینه ۲ دورهٔ تناوب بزرگ‌تر از ۲π می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷

می‌دانیم:

$$\cos x=۱-۲\sin^۲\frac{x}{۲}$$

بنابراین:

$$a\sin^۲ bx+c=-۲\sin^۲\frac{x}{۲}+۱\Rightarrow\begin{cases}a=-۲\\ c=۱\end{cases}\Rightarrow a-c=-۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸

ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=a\tan bx\cos^۲ bx+c=a\sin bx\cos bx+c=\frac{a}{۲}\sin ۲bx+c$$

با توجه به نمودار دورهٔ تناوب برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است.

$$T=\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow|b|=\frac{۳}{۲}$$

همچنین:

$$f(۰)=۲\Rightarrow c=۲$$

کمترین مقدار تابع صفر است:

$$c-\left|\frac{a}{۲}\right|=۰\Rightarrow\left|\frac{a}{۲}\right|=۲\Rightarrow|a|=۴$$

تابع در $x=۰$ به صورت نزولی است. بنابراین $ab<۰$ می‌باشد.

خواهیم داشت:

$$|ab|=۴\times\frac{۳}{۲}=۶\Rightarrow ab=-۶\Rightarrow ab+c=-۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹ با شرط $\sin x \neq 0$، معادله را ساده می‌کنیم:

$$\cot x(2\cos x+1)=\frac{1}{\sin x} \xrightarrow{\times \sin x} \cos x(2\cos x+1)=1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x=-1 \text{ غ ق ق} & (\sin x \text{ برابر صفر می‌شود}) \\ \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

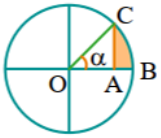
۵۰ شعاع دایره برابر ۱ است.

$$OA=1-AB=1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha=OA=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{6}$$

مساحت قطاع OBC را محاسبه می‌کنیم:

زاویه	مساحت
2π	π
$\frac{\pi}{6}$	$S=\frac{\pi}{12}$ ✓



$$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}OA\times OC\times \sin\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

خواهیم داشت:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{OBC}-S_{\triangle OAC}=\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x-\cos^2 x)\underbrace{(\sin^2 x+\cos^2 x)}_{1}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\cos 2x=\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

ریشه‌های مثبت معادله را به دست می‌آوریم:

$$k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$$

$$k=1 \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}, x=\frac{4\pi}{3}$$

$$k=2 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}, x=\frac{7\pi}{3}$$

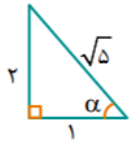
واضح است اگر $\alpha \geq \frac{4\pi}{3}$ باشد، معادله دارای سه ریشه و اگر $\alpha > \frac{5\pi}{3}$ باشد، معادله دارای ۴ ریشه است، در نتیجه حداکثر α برابر $\frac{5\pi}{3}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲

$$\tan\alpha=\frac{۴}{\tan\alpha}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\tan^۲\alpha=۴\\ \alpha\text{ درناحیه سوم}\Rightarrow\tan\alpha>۰\end{array}\right\}\Rightarrow\tan\alpha=۲$$

$$\cos^۲(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\frac{۱+\cos(\frac{\pi}{۲}+۲\alpha)}{۲}=\frac{۱-\sin۲\alpha}{۲}$$



$$\Rightarrow\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{-۱}{\sqrt{۵}}\\ \sin\alpha=\frac{-۲}{\sqrt{۵}}\end{array}\Rightarrow\sin۲\alpha=\frac{۴}{۵}$$

$$\cos^۲(\frac{\pi}{۴}+\alpha)=\frac{۱}{۱۰}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۳

با توجه به آن‌که $\cos^۲ bx=\frac{۱+\cos۲bx}{۲}$، پس:

$$f(x)=a+\frac{۳}{۲}(۱+\cos۲bx)=a+\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۲}\cos۲bx$$

$$\min=a+\frac{۳}{۲}-\frac{۳}{۲}=a\Rightarrow a=۱$$

$$T=\frac{۲\pi}{|۲b|}\Rightarrow\frac{\pi}{|b|}=۳\Rightarrow|b|=\frac{\pi}{۳}$$

بنابراین $ab=\pm\frac{\pi}{۳}$، اما $\frac{\pi}{۳}$ در گزینه‌ها موجود می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۴

در ابتدا دقت می‌کنیم که:

$$\begin{array}{l}\alpha=x+\frac{\pi}{۳}\\ \beta=\frac{\pi}{۶}-x\end{array}\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$$

با توجه به آن‌که α و β متمم هستند، پس: $\sin\beta=\cos\alpha$

پس می‌توانیم معادله را به صورت مقابل بنویسیم:

$$\sin(\frac{\pi}{۶}-x)=\cos(x+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow ۴\sin(x+\frac{\pi}{۳})\cos(x+\frac{\pi}{۳})=۱$$

$$\Rightarrow\sin(۲x+\frac{۲\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\begin{cases}۲x+\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\\ ۲x+\frac{۲\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۱۲}\end{cases}$$

$$۰<x<۲\pi\Rightarrow x=(\pi-\frac{\pi}{۴})\text{ و }(۲\pi-\frac{\pi}{۴})\text{ و }\frac{\pi}{۱۲}\text{ و }(\pi+\frac{\pi}{۱۲})$$

$$\text{جمع مقادیر }x=۴\pi-\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}=۴\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۱۱\pi}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵ فرض کنید $x+\frac{\pi}{۳}=\alpha$ باشد، پس: $x=\alpha-\frac{\pi}{۳}$

$$\sin\alpha=\frac{۲}{۳}\quad \cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$A=\sin(۲x+\frac{\pi}{۶})=\sin(۲(\alpha-\frac{\pi}{۳})+\frac{\pi}{۶})=\sin(۲\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\cos۲\alpha=\sin^{۲}\alpha-\cos^{۲}\alpha=\frac{۴}{۹}-\frac{۵}{۹}=\frac{-۱}{۹}$$

$$B=\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\cos(\alpha-\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶})=\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})=\sin\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{-\frac{۱}{۹}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{-۱}{۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶

$$f(x)=۱+a\cos(bx+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲})=۱-a\sin(bx+\frac{\pi}{۶})$$

با توجه به اینکه نمودار f در اطراف مبدأ صعودی و دارای تقعر رو به بالاست، پس $a>۰$ و $b<۰$ است.

$$f(x)=۱+a\sin(-bx-\frac{\pi}{۶})$$

$$f(۰)=۰\Rightarrow۱-\frac{a}{۲}=۰\Rightarrow a=۲$$

$$f(-\frac{\pi}{۳})=۰\Rightarrow\sin(\frac{b\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{b\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}=\frac{-۵\pi}{۶}\Rightarrow b=-۲\Rightarrow ۲a-b=۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۷ نمودار تابع نزولی است، پس $a<۰$ است.

$$B: f(x)=۰\Rightarrow\tan(ax-\frac{\pi}{۳})=-۱\Rightarrow ax-\frac{\pi}{۳}=-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x_B=\frac{\pi}{۱۲a}$$

$$A: f(x)=-\infty\Rightarrow\tan(ax-\frac{\pi}{۳})=-\infty\Rightarrow ax-\frac{\pi}{۳}=-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x_A=\frac{-\pi}{۶a}$$

$$\Rightarrow AB=\frac{-\pi}{۶a}-\frac{\pi}{۱۲a}=-\frac{\pi}{۴a}=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow a=-\frac{۳}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۸ از اتحاد $\cos^{۲}x=۱-\sin^{۲}x$ استفاده می‌کنیم:

$$۲\sin^{۴}x+۳(۱-\sin^{۲}x)=۲\Rightarrow ۲\sin^{۴}x-۳\sin^{۲}x+۱=۰$$

$$(\sin^{۲}x-۱)(۲\sin^{۲}x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\sin^{۲}x=۱\Rightarrow\sin x=\pm۱\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ \sin^{۲}x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$$

پس ۶ جواب دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹ اگر $\cos x = \cos\alpha$ باشد، آن‌گاه: $x = \pm\alpha + 2k\pi$

$$\cos(2x-\frac{\pi}{4}) = -\sin x = \cos(\frac{\pi}{2}+x) \Rightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+x+2k\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4}+2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

بزرگ‌ترین جواب برابر $\frac{3\pi}{4}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۰ توجه کنید که:

$$5\sin\alpha - 10\cos\alpha = 11$$

$$5\sin\alpha = 10\cos\alpha + 11 \Rightarrow 25\sin^2\alpha = 100\cos^2\alpha + 121 + 220\cos\alpha \Rightarrow 25 - 25\cos^2\alpha = 100\cos^2\alpha + 121 + 220\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 125\cos^2\alpha + 220\cos\alpha + 96 = 0 \Rightarrow (25\cos\alpha + 24)(5\cos\alpha + 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow 5\sin\alpha = 10(-\frac{4}{5}) + 11 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-3}{4} \\ \cos\alpha = -\frac{24}{25} \Rightarrow 5\sin\alpha = 10(-\frac{24}{25}) + 11 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{7}{25} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{-7}{24} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan(\frac{5\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha = \frac{-1}{\tan\alpha} = \frac{4}{3} \\ \tan(\frac{5\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha = \frac{-1}{\tan\alpha} = \frac{24}{7} \end{cases}$$ در گزینه‌ها نیست

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۱ توجه کنید که:

$$f(x) = 2(\frac{1-\cos(5x+\frac{\pi}{2})}{2}) - \frac{1+\cos(5x-\frac{\pi}{2})}{2}$$

$$= 1+\sin(5x) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(5x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(5x)$$

بنابراین دوره تناوب تابع f برابر است با: $\frac{2\pi}{5}$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲ معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\cos(5x-\frac{\pi}{4}) = -\sin(5x-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \cos(5x-\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}+5x-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \cos(5x-\frac{\pi}{4}) = \cos(5x+\frac{\pi}{3})$$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$\begin{cases} \cancel{5x} - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \cancel{5x} + \frac{\pi}{3} \text{ غ ق ق} \\ 5x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - 5x - \frac{\pi}{3} \Rightarrow 10x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

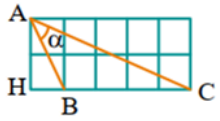
$$10x = (24k-1)\frac{\pi}{12} \Rightarrow x = (24k-1)\frac{\pi}{120}, k\in\mathbb{Z}$$

چون $x\in(0,2\pi)$، پس: $0 < (24k-1)\frac{\pi}{120} < 2\pi \Rightarrow 0 < 24k-1 < 240 \Rightarrow 1 < 24k < 240+1 \Rightarrow \frac{1}{24} < k < 10+\frac{1}{24} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\in\{1,2,\dots,10\}$

پس معادله ۱۰ جواب در بازه $(0,2\pi)$ دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳ اندازهٔ اضلاع هر یک از مربع‌ها را یک واحد در نظر می‌گیریم:



$AB=\sqrt{۲^۲+۱^۲}=\sqrt{۵}$ $AC=\sqrt{۲^۲+۵^۲}=\sqrt{۲۹}$

خواهیم داشت: $S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\alpha=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵}\times\sqrt{۲۹}\sin\alpha$

از طرفی: $S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times۲\times۴=۴$

بنابراین: $\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۴۵}\sin\alpha=۴\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۸}{\sqrt{۱۴۵}}$

در نتیجه: $\cos^۲\alpha=۱-\sin^۲\alpha=۱-\frac{۶۴}{۱۴۵}=\frac{۸۱}{۱۴۵}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۹}{\sqrt{۱۴۵}}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۸}{۹}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴

روش اول:

عبارت سمت چپ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}+\cot\frac{\alpha}{۲}=\tan\frac{\alpha}{۲}+\cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{۲}{\sin\alpha}$$

خواهیم داشت: $\frac{۲}{\sin\alpha}=\frac{k}{\cos\alpha}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۲}{k}\Rightarrow۱+\tan^۲\alpha=۱+\frac{۴}{k^۲}=\frac{k^۲+۴}{k^۲}$

$$\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=\frac{k^۲+۴}{k^۲}\Rightarrow\cos^۲\alpha=\frac{k^۲}{k^۲+۴}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{k}{\sqrt{k^۲+۴}}$$

روش دوم:

فرض می‌کنیم $\alpha=\frac{\pi}{۳}$ باشد:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}+\cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{k}{\cos\alpha}\Rightarrow\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}+\sqrt{۳}=\frac{k}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow۲k=\frac{\sqrt{۳}}{۳}+\sqrt{۳}=\frac{۴}{۳}\sqrt{۳}\Rightarrow k=\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$$

می‌دانیم $\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{۱}{۲}$ است. در بین گزینه‌ها، گزینهٔ ۴ به ازای $k=\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵ دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow ۱-\sin ۲x=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \sin ۲x=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ ۲x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{۱۲}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۱۱\pi}{۱۲}\checkmark\\ x=\frac{۲۳\pi}{۱۲}\text{غ ق ق}\end{cases}\\ x=k\pi+\frac{۷\pi}{۱۲}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{۷\pi}{۱۲}\checkmark\\ x=\frac{۱۹\pi}{۱۲}\text{غ ق ق}\end{cases}\end{cases}$$

به ازای $x=\frac{۲۳\pi}{۱۲}$ و $x=\frac{۱۹\pi}{۱۲}$ مقدار $\sin x$ منفی و $\cos x$ مثبت و در نتیجه $\sin x-\cos x$ منفی است. بنابراین:

مجموع جواب‌ها: $\frac{۱۱\pi}{۱۲}+\frac{۷\pi}{۱۲}=\frac{۱۸\pi}{۱۲}=\frac{۳\pi}{۲}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶ نکته: علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع به‌صورت زیر است:

نسبت مثلثاتی \ ربع	اول	دوم	سوم	چهارم
$\mathbf{Sin\alpha}$	+	+	−	−
$\mathbf{Cos\alpha}$	+	−	−	+
$\mathbf{\tan\alpha}$	+	−	+	−
$\mathbf{Cot\alpha}$	+	−	+	−

طبق فرض داریم:

$$\mathbf{Sin\alpha.\tan\alpha=Sin\alpha.\frac{Sin\alpha}{Cos\alpha}=\frac{Sin^{۲}\alpha}{Cos\alpha}<۰\xrightarrow{Sin^{۲}\alpha\geq ۰}Cos\alpha<۰}$$

$$\mathbf{Cos\alpha.Cot\alpha=Cos\alpha.\frac{Cos\alpha}{Sin\alpha}=\frac{Cos^{۲}\alpha}{Sin\alpha}>۰\xrightarrow{Cos^{۲}\alpha\geq ۰}Sin\alpha>۰}$$

پس $Cos\alpha$ منفی و $Sin\alpha$ مثبت است، بنابراین از نکتهٔ بالا نتیجه می‌گیریم که انتهای کمان زاویهٔ α در ربع دوم قرار دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷ نکته: $\mathbf{Sin(\pi+\alpha)=-Sin\alpha}\quad,\quad\mathbf{Cos(\pi+\alpha)=-Cos\alpha}$

نکته: $\mathbf{Sin(\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)=Cos\alpha}\quad,\quad\mathbf{Cos(\frac{\pi}{۲}\pm\alpha)=\mp Sin\alpha}$

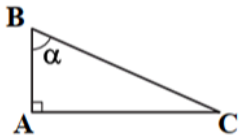
نکته: $(k\in\mathbb{Z})\quad\mathbf{Sin(۲k\pi\pm\alpha)=\pm Sin\alpha}\quad,\quad\mathbf{Cos(۲k\pi\pm\alpha)=Cos\alpha}$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\frac{\mathbf{۳\,Sin(\pi+\alpha)-Cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}}{\mathbf{۴\,Sin(۴\pi-\alpha)-Cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha)}}=\frac{-۳Sin\alpha-(-Sin\alpha)}{-۴Sin\alpha-Sin\alpha}=\frac{-۲Sin\alpha}{-۵Sin\alpha}=\frac{۲}{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

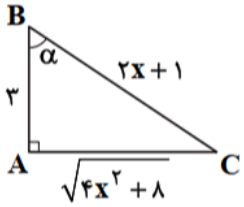
۶۸ نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل روبه‌رو داریم:



$$\sin\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC} \qquad \cot\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}} = \frac{AB}{AC}$$

ابتدا با توجه به شکل داده شده، می‌توان به کمک رابطهٔ فیثاغورس، مقدار x را به‌دست آورد:



$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow (۲x+۱)^۲ = ۳^۲ + (\sqrt{۴x^۲+۸})^۲$$

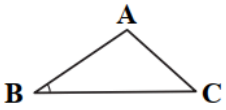
$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۱ + ۴x = ۹ + ۴x^۲ + ۸ \Rightarrow ۴x = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

حال داریم:

$$\sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{۴x^۲+۸}}{۲x+۱} = \frac{\sqrt{۴\times۱۶+۸}}{۹} = \frac{\sqrt{۷۲}}{۹} = \frac{۶\sqrt{۲}}{۹} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۹ نکته: مجموع زوایای داخلی یک nضلعی محدب برابر $(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$ است.



نکته: مساحت مثلث ABC برابر است با: $S = \frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times \sin\hat{B}$

مجموع زوایای داخلی هشت‌ضلعی برابر $۶\times ۱۸۰^\circ$ است. با توجه به اینکه هشت‌ضلعی داده‌شده منتظم است، نتیجه می‌گیریم همهٔ زوایای آن با هم برابرند، پس:

$$\hat{A} = \frac{۶\times ۱۸۰^\circ}{۸} = ۱۳۵^\circ$$

$$S' = \frac{۱}{۲}\times AB\times AH\times \sin\hat{A} = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۲\times \sin ۱۳۵^\circ = ۲\sin ۴۵^\circ = ۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

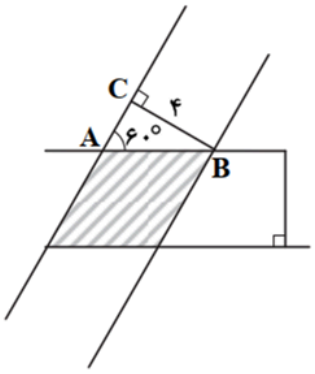
بنابراین مساحت قسمت هاشورخورده برابر است با:

$$S = ۴S' = ۴\sqrt{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰ نکته: مساحت متوازی‌الاضلاع برابر حاصل‌ضرب قاعده در ارتفاع است.

ابتدا اندازهٔ ضلع متوازی‌الاضلاع را می‌یابیم:



$$\overset{\triangle}{ABC}: \sin ۶۰^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۴}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۴}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

بنابراین طول ضلع این متوازی‌الاضلاع برابر $\frac{۸}{\sqrt{۳}}$ است. با توجه به اینکه ارتفاع آن برابر ۴ است، نتیجه می‌گیریم مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با:

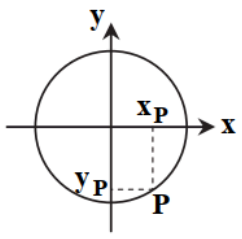
$$S = \frac{۸}{\sqrt{۳}}\times ۴ = \frac{۳۲}{\sqrt{۳}} = \frac{۳۲\sqrt{۳}}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱ نکته: $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$

P در ربع چهارم قرار دارد، پس: $x_P > ۰ \;,\; y_P < ۰$

از نقطهٔ P بر محورهای مختصات عمود می‌کنیم، در این صورت داریم:



$$\cos\theta = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x_P = \frac{۱}{۳} \quad (*)$$

$$\sin\theta < ۰ \Rightarrow \sin\theta = -\sqrt{۱-\cos^۲\theta} \overset{(*)}{=\!=} -\sqrt{۱-\frac{۱}{۹}} = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow y_P = -\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۲ نکته: $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$

نکته: علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی مختلف به‌صورت زیر است:

	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱ \Rightarrow \cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta \xrightarrow[\cos\theta<۰]{\theta \text{ در ربع دوم}} \cos\theta=-\sqrt{۱-\sin^۲\theta}=-\sqrt{۱-\frac{۲۵}{۴۹}}=-\frac{\sqrt{۲۴}}{۷}$$

راه‌حل اول:

$$\begin{cases}\tan^۲\theta=\dfrac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\dfrac{\frac{۲۵}{۴۹}}{\frac{۲۴}{۴۹}}=\dfrac{۲۵}{۲۴}\\ \cot^۲\theta=\dfrac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\dfrac{\frac{۲۴}{۴۹}}{\frac{۲۵}{۴۹}}=\dfrac{۲۴}{۲۵}\end{cases} \Rightarrow \tan^۲\theta+\cot^۲\theta=\frac{۲۵}{۲۴}+\frac{۲۴}{۲۵}=\frac{۶۲۵+۵۷۶}{۶۰۰}=\frac{۱۲۰۱}{۶۰۰}$$

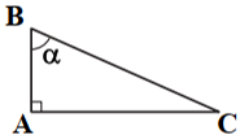
راه‌حل دوم:

نکته: $۱+\tan^۲\theta=\dfrac{۱}{\cos^۲\theta}$ ، $۱+\cot^۲\theta=\dfrac{۱}{\sin^۲\theta}$

$$\begin{cases}۱+\tan^۲\theta=\dfrac{۱}{\cos^۲\theta}=\dfrac{۴۹}{۲۴}\\ ۱+\cot^۲\theta=\dfrac{۱}{\sin^۲\theta}=\dfrac{۴۹}{۲۵}\end{cases} \Rightarrow ۲+\tan^۲\theta+\cot^۲\theta=\frac{۴۹}{۲۵}+\frac{۴۹}{۲۴} \Rightarrow \tan^۲\theta+\cot^۲\theta=\frac{۲۴}{۲۵}+\frac{۲۵}{۲۴}=\frac{۵۷۶+۶۲۵}{۶۰۰}=\frac{۱۲۰۱}{۶۰۰}$$

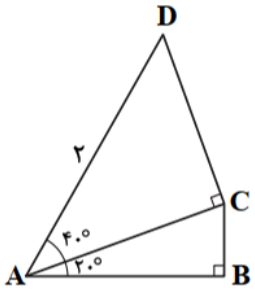
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۳ نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل روبه‌رو داریم:



$$\sin\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}}=\frac{AC}{BC} \qquad \tan\alpha=\frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}=\frac{AC}{AB}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}}=\frac{AB}{BC} \qquad \cot\alpha=\frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}}=\frac{AB}{AC}$$

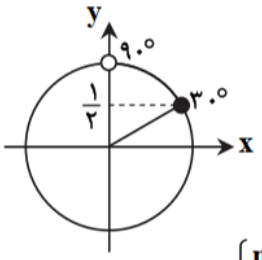


$$\overset{\triangle}{ACD}: \cos۴۰^\circ=\frac{AC}{AD} \Rightarrow \cos۴۰^\circ=\frac{AC}{۲} \Rightarrow AC=۲\cos۴۰^\circ \quad (*)$$

$$\overset{\triangle}{ABD}: \sin۲۰^\circ=\frac{BC}{AC} \Rightarrow BC=AC\sin۲۰^\circ \xrightarrow{(*)} BC=۲\sin۲۰^\circ\cos۴۰^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴ زوایای ۳۰° و ۹۰° را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم.



می‌دانیم $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$ و $\sin ۹۰^\circ = ۱$ و مطابق شکل واضح است که اگر $۳۰^\circ \le x < ۹۰^\circ$، آنگاه $\frac{۱}{۲} \le \sin x < ۱$. حال با توجه به اینکه $\sin x = \frac{m-۳}{۵}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲} \le \frac{m-۳}{۵} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-۳}{۵} \ge \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲m-۶ \ge ۵ \Rightarrow ۲m \ge ۱۱ \Rightarrow m \ge \frac{۱۱}{۲} \\ \frac{m-۳}{۵} < ۱ \Rightarrow m-۳ < ۵ \Rightarrow m < ۸ \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۱}{۲} \le m < ۸$$

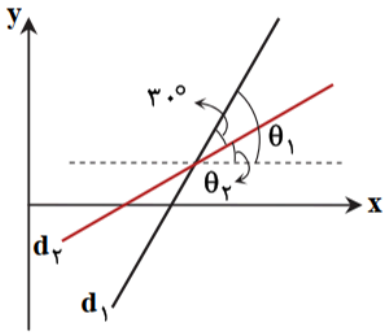
تنها ۲ عدد صحیح ۶ و ۷ در این محدوده قرار دارند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۵ نکته: اگر خط d با جهت مثبت محور xها زاویهٔ θ بسازد، شیب خط d برابر $\tan\theta$ است.

با توجه به معادلهٔ خط $d_۱$ داریم:

$$y - \sqrt{۳}x + ۱۰ = ۰ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۱۰$$
$$\Rightarrow \tan\theta_۱ = \sqrt{۳} \Rightarrow \theta_۱ = ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow \theta_۲ + ۳۰^\circ = ۶۰^\circ \Rightarrow \theta_۲ = ۳۰^\circ$$



بنابراین شیب خط $d_۲$ برابر است با:

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

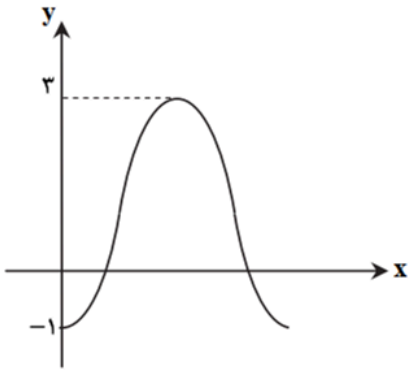
طبق فرض این مقدار برابر $\frac{m}{۳}$ است، پس:

$$m = \sqrt{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۶ نکته: ماکزیمم تابع $y = a\cos(x) + b$ برابر $|a| + b$ و مینیمم آن برابر $-|a| + b$ است.

با توجه به نمودار داده‌شده داریم:



$$\begin{cases} |a| + b = ۳ \\ -|a| + b = -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = ۲ \\ b = ۱ \end{cases}$$

شکل داده‌شده، قرینهٔ نمودار $y = \cos x$ نسبت به محور xها است، پس $a < ۰$ است و $a = -۲$ قابل‌قبول است. بنابراین: $۲a + ۳b = -۱$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۷

نکته : $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\text{Cos}\,\alpha$ ، $\text{Sin}(\pi+\alpha)=-\text{Sin}\,\alpha$ ، $\text{Cos}(\pi+\alpha)=-\text{Cos}\,\alpha$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

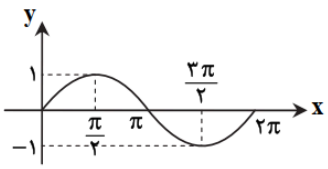
$$A=\text{Sin}\frac{۶\pi}{۵}+\text{Cos}\frac{۶\pi}{۵}+\text{Sin}\frac{۷\pi}{۱۰}=\text{Sin}(\pi+\frac{\pi}{۵})+\text{Cos}(\pi+\frac{\pi}{۵})+\text{Sin}(\frac{۵\pi}{۱۰}+\frac{۲\pi}{۱۰})$$
$$=\text{Sin}(\pi+\frac{\pi}{۵})+\text{Cos}(\pi+\frac{\pi}{۵})+\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۵})$$
$$=-\text{Sin}\frac{\pi}{۵}-\text{Cos}\frac{\pi}{۵}+\text{Cos}\frac{\pi}{۵}=-\text{Sin}\frac{\pi}{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

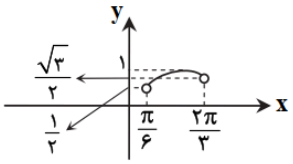
۷۸

نکته: نمودار تابع $y=\text{Sin}\,x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌شکل روبه‌رو است:

نکته: $\text{Sin}(\pi-\alpha)=\text{Sin}\,\alpha$



نمودار تابع $y=\text{Sin}\,x$ را با دامنهٔ $(\frac{\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۳})$ رسم می‌کنیم:



توجه کنید عرض نقاط ابتدایی و انتهایی به‌ترتیب برابر $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است؛ زیرا:

$$\text{Sin}\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}\quad\text{و}\quad\text{Sin}\frac{۲\pi}{۳}=\text{Sin}(\pi-\frac{\pi}{۳})=\text{Sin}\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس با توجه به شکل، برد این تابع برابر است با:

$$(\frac{۱}{۲},۱]$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹

نکته : $\text{Sin}(۲k\pi\pm\alpha)=\pm\text{Sin}\alpha$ ، $\text{Sin}(\pi+\alpha)=-\text{Sin}\alpha$ ، $\text{Cos}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Sin}\alpha$ ، $\text{Cos}(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\text{Sin}\alpha$ ، $\text{Sin}(\pi-\alpha)=\text{Sin}\alpha$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

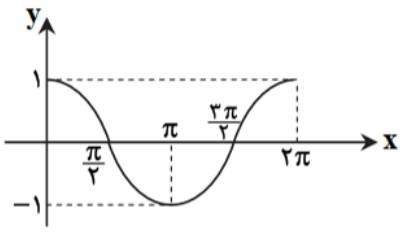
$$\text{Sin}(۳۶۰^\circ-۲۰^\circ)+۳\,\text{Sin}(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)+۲\,\text{Sin}(۳۶۰^\circ+۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)-\text{Cos}(۹۰^\circ-۲۰^\circ)-۴\,\text{Cos}(۹۰^\circ+۲۰^\circ)$$
$$=-\text{Sin}(۲۰^\circ)-۳\,\text{Sin}\,۲۰^\circ+۲\,\text{Sin}(۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)-\text{Sin}\,۲۰^\circ+۴\,\text{Sin}\,۲۰^\circ=-\text{Sin}\,۲۰^\circ-۳\,\text{Sin}\,۲۰^\circ+۲\,\text{Sin}\,۲۰^\circ+۳\,\text{Sin}\,۲۰^\circ=\text{Sin}\,۲۰^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰

نکته: $\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\text{Cos}\,x$

نکته: نمودار $y=\text{Cos}\,x$ به‌شکل زیر است:



ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=a+b\,\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+x)=a-b\,\text{Cos}\,x$$

ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس:

$$a-b(-۱)=۳ \Rightarrow a+b=۳$$

به‌ازای $x=۰$، مقدار تابع برابر -۱ است، بنابراین:

$$a-b\,\text{Cos}(۰)=a-b=-۱$$

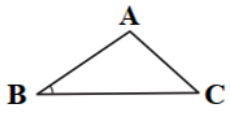
$$\begin{cases}a+b=۳\\a-b=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=۲\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱ راه‌حل اول:

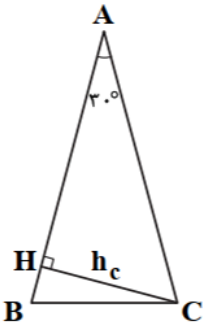
نکته: مساحت مثلث، برابر نصف حاصل‌ضرب ارتفاع در قاعدهٔ نظیر آن است.

نکته: مساحت مثلث ABC برابر است با:



$$S = \frac{۱}{۲} \times AB \times BC \times Sin\hat{B}$$

مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است. پس:



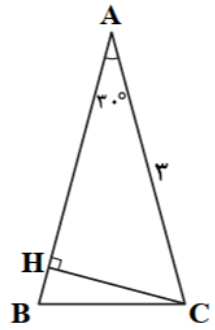
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}=۷۵^\circ} \hat{A} = ۳۰^\circ$$

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۳ \times Sin\,۳۰^\circ = \frac{۹}{۴}$$

همچنین اگر طول ارتفاع وارد بر AB را برابر h_c در نظر بگیریم، داریم:

$$S = \frac{۱}{۲} h_c \times AB = \frac{۳}{۲} h_c \xrightarrow{S=\frac{۹}{۴}} \frac{۳}{۲} h_c = \frac{۹}{۴} \Rightarrow h_c = \frac{۳}{۲}$$

راه‌حل دوم:



مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر ۱۸۰° است، پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}=۷۵^\circ} \hat{A} = ۳۰^\circ$$

حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC داریم:

$$Sin\,\hat{A} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow Sin\,۳۰^\circ = \frac{HC}{۳} \Rightarrow HC = ۳\,Sin\,۳۰^\circ = \frac{۳}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۲ نکته: $۱ - Sin^۲\theta = Cos^۲\theta$

ابتدا عبارت سمت چپ را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$\frac{Cos\,۲۰^\circ}{۱+Sin\,۲۰^\circ} - \frac{Cos\,۲۰^\circ}{۱-Sin\,۲۰^\circ} = Cos\,۲۰^\circ\left(\frac{۱-Sin\,۲۰^\circ - ۱-Sin\,۲۰^\circ}{(۱+Sin\,۲۰^\circ)(۱-Sin\,۲۰^\circ)}\right) = Cos\,۲۰^\circ \times \frac{-۲\,Sin\,۲۰^\circ}{۱-Sin^۲\,۲۰^\circ}$$

$$= Cos\,۲۰^\circ \times \frac{-۲\,Sin\,۲۰^\circ}{Cos^۲\,۲۰^\circ} = -۲\frac{Sin\,۲۰^\circ}{Cos\,۲۰^\circ} = -۲\,tan\,۲۰^\circ$$

طبق فرض این مقدار برابر $k\,tan\,۲۰^\circ$ است، پس $k = -۲$.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۳ نکته: $\text{Cos}(۱۸۰^\circ+\alpha)=-\text{Cos}\,\alpha$, $\tan(۱۸۰^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$, $\text{Sin}(۳۶۰^\circ-\alpha)=-\text{Sin}\,\alpha$

نکته: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف (برحسب رادیان) در جدول زیر آمده است:

	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\text{Sin}\,\alpha$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰
$\text{Cos}\,\alpha$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan\alpha$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	ت ن	۰	ت ن	۰
$\text{Cot}\,\alpha$	ت ن	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	ت ن	۰	ت ن

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\text{Sin}\,۳۳۰^\circ=\text{Sin}(۳۶۰^\circ-۳۰^\circ)=-\text{Sin}\,۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۱۳۵^\circ=\tan(۱۸۰^\circ-۴۵^\circ)=-\tan ۴۵^\circ=-۱$$

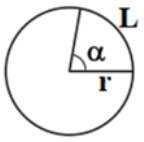
$$\text{Cos}\,۲۴۰^\circ=\text{Cos}(۱۸۰^\circ+۶۰^\circ)=-\text{Cos}\,۶۰^\circ=-\frac{۱}{۲}$$

با جای‌گذاری این مقادیر داریم:

$$\frac{\text{Sin}\,۳۳۰^\circ+\tan ۱۳۵^\circ}{\text{Cos}\,۲۴۰^\circ}=\frac{(-\frac{۱}{۲})+(-۱)}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

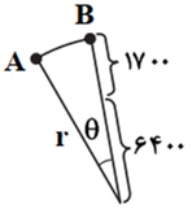
۸۴ نکته: اگر L طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در دایره‌ای به شعاع r باشد و α برحسب رادیان باشد، آنگاه:



$$\alpha=\frac{L}{r}$$

ماهواره ۱۷۰۰ کیلومتر با سطح زمین فاصله دارد پس مطابق شکل داریم:

$$r=۶۴۰۰+۱۷۰۰=۸۱۰۰\,km$$



$$\left.\begin{array}{l}\theta=۲۰^\circ\\ ۱^\circ=\frac{\pi}{۱۸۰}\text{رادیان}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{۲۰\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۹}\ \text{رادیان}$$

$$\text{طول کمان}\ \overset{\frown}{AB}=\frac{\pi}{۹}\times۸۱۰۰=۹۰۰\pi$$

چون طول کمان AB برابر ۹۰۰π است و سرعت ماهواره $۱۵\pi\,\frac{km}{h}$ است؛ یعنی در هر ساعت ۱۵π کیلومتر را طی می‌کند. پس فاصلهٔ A تا B را در زمان $\frac{۹۰۰\pi}{۱۵\pi}$ یعنی ۶۰ ساعت طی می‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۵

نکته: $\begin{cases} \text{Sin}(2k\pi \pm \alpha) = \pm \text{Sin}\,\alpha \\ \text{Cos}(\pi + \alpha) = -\text{Cos}\,\alpha \end{cases}$, $\begin{cases} \text{Sin}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \text{Cos}\,\alpha \\ \text{Cos}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\text{Sin}\,\alpha \end{cases}$

حاصل هر نسبت مثلثاتی را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\text{Sin}\,700^\circ = \text{Sin}(720^\circ - 20^\circ) = \text{Sin}(-20^\circ) = -\text{Sin}\,20^\circ$$
$$\text{Cos}\,200^\circ = \text{Cos}(180^\circ + 20^\circ) = -\text{Cos}\,20^\circ$$
$$\text{Cos}\,250^\circ = \text{Cos}(270^\circ - 20^\circ) = -\text{Sin}\,20^\circ$$
$$\text{Sin}\,110^\circ = \text{Sin}(90^\circ + 20^\circ) = \text{Cos}\,20^\circ$$

بنابراین:

$$\frac{-\text{Sin}\,20^\circ + \text{Cos}\,20^\circ}{-2\text{Sin}\,20^\circ - \text{Cos}\,20^\circ} = m$$

صورت و مخرج کسر بالا را بر $\text{Sin}\,20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-1 + \text{Cot}\,20^\circ}{-2 - \text{Cot}\,20^\circ} = m \Rightarrow -2m - m\cdot\text{Cot}\,20^\circ = -1 + \text{Cot}\,20^\circ \Rightarrow -2m + 1 = (1+m)\text{Cot}\,20^\circ \Rightarrow \text{Cot}\,20^\circ = \frac{1-2m}{1+m}$$

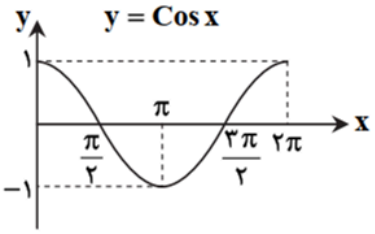
عبارت خواسته‌شده برابر است با:

$$\text{Cot}\,740^\circ = \text{Cot}(720^\circ + 20^\circ) = \text{Cot}\,20^\circ = \frac{1-2m}{1+m}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶

نکته: نمودار تابع $y = \text{Cos}\,x$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ مطابق شکل زیر است که حداقل و حداکثر نمودار تابع -1 و 1 هستند.



نکته: $\text{Sin}(-x) = -\text{Sin}\,x$, $\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - x) = \text{Cos}\,x$

تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = a + b\text{Sin}(x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(x) = a - b\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow f(x) = a - b\,\text{Cos}\,x$$

تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است بنابراین $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0 \Rightarrow 0 = a - b\,\text{Cos}(0) \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \quad (I)$$

با توجه به تقارن شکل، تابع در نقطهٔ $x = \pi$ به مقدار حداکثر خود یعنی $y = 4$ رسیده است. بنابراین $f(\pi) = 4$.

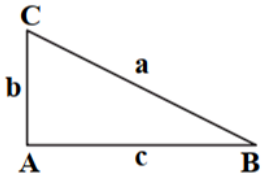
$$f(\pi) = 4 \Rightarrow 4 = a - b\,\text{Cos}\,\pi \Rightarrow a + b = 4 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow f(x) = 2 - 2\text{Cos}\,x$$

$$f(\frac{11\pi}{3}) = 2 - 2\text{Cos}(\frac{11\pi}{3}) = 2 - 2\text{Cos}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = 2 - 2\text{Cos}(\frac{\pi}{3}) = 2 - 2\times\frac{1}{2} = 1$$

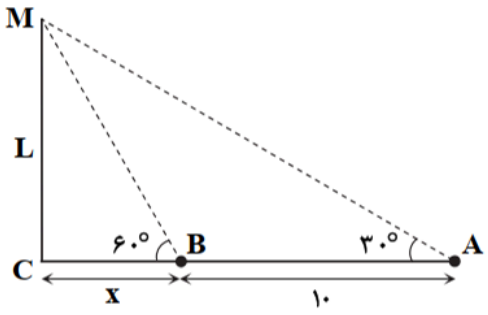
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۷ نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\sin\hat{B}=\frac{b}{a} \qquad \tan\hat{B}=\frac{b}{c}$$

$$\cos\hat{B}=\frac{c}{a} \qquad \cot\hat{B}=\frac{c}{b}$$



اگر طول درخت L باشد، داریم:

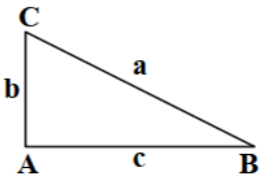
$$\overset{\triangle}{AMC}: \tan ۳۰^\circ=\frac{L}{x+۱۰}=\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow ۳L=\sqrt{۳}x+۱۰\sqrt{۳}$$

$$\overset{\triangle}{BMC}: \tan ۶۰^\circ=\frac{L}{x}=\sqrt{۳} \Rightarrow L=\sqrt{۳}x$$

$$\Rightarrow ۳L=L+۱۰\sqrt{۳} \Rightarrow L=\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۲}=۵\sqrt{۳}\simeq ۵\times ۱/۷=۸/۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۸ نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:



$$\sin\hat{B}=\frac{b}{a} \qquad \tan\hat{B}=\frac{b}{c} \qquad \cos\hat{B}=\frac{c}{a} \qquad \cot\hat{B}=\frac{c}{b} \qquad \cot\hat{A}_۱=\frac{CA_۱}{BC}$$

$$\cot\hat{A}_۲=\frac{CA_۲}{BC}=\frac{CA_۱+A_۱A_۲}{BC}=\frac{CA_۱}{BC}+\frac{A_۱A_۲}{BC}$$

$$\cot\hat{A}_۳=\frac{CA_۳}{BC}=\frac{CA_۱+A_۱A_۲+A_۲A_۳}{BC}=\frac{CA_۱}{BC}+\frac{A_۱A_۲}{BC}+\frac{A_۲A_۳}{BC}$$

$$\cot\hat{A}_۴=\frac{CA_۴}{BC}=\frac{CA_۱}{BC}+\frac{A_۱A_۲}{BC}+\frac{A_۲A_۳}{BC}+\frac{A_۳A_۴}{BC}$$

چون کتانژانت زاویه‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، مقدار اضافه‌شده به هر جملهٔ دنباله، مقداری ثابت است:

$$\frac{A_۱A_۲}{BC}=\frac{A_۲A_۳}{BC}=\frac{A_۳A_۴}{BC} \Rightarrow A_۱A_۲=A_۲A_۳=A_۳A_۴$$

$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{BA_۳A_۴}}=\frac{۱}{۲}\times BC\times A_۳A_۴ \\ S_{\overset{\triangle}{BA_۱A_۲}}=\frac{۱}{۲}\times BC\times A_۱A_۲ \end{cases} \xrightarrow{A_۱A_۲=A_۳A_۴} S_{\overset{\triangle}{BA_۳A_۴}}=S_{\overset{\triangle}{BA_۱A_۲}} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{BA_۳A_۴}}}{S_{\overset{\triangle}{BA_۱A_۲}}}=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹ نکته: $\text{Sin}^۲x = ۱-\text{Cos}^۲x \ , \ \text{Cos}^۲x = ۱-\text{Sin}^۲x$

با استفاده از رابطهٔ $\text{Cos}^۲x = ۱-\text{Sin}^۲x$ داریم:

$$۳\text{Cos}^۲x+\text{Sin}x=۱ \Rightarrow ۳(۱-\text{Sin}^۲x)+\text{Sin}x-۱=۰ \Rightarrow ۳\text{Sin}^۲x-\text{Sin}x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (\text{Sin}x-۱)(۳\text{Sin}x+۲)=۰ \xrightarrow[\text{Sin}x<۰]{\text{x در ناحیهٔ سوم}} \begin{cases} \text{Sin}x=۱ \text{ غ ق ق} \\ \text{Sin}x=\dfrac{-۲}{۳} \end{cases}$$

اکنون مقدار $\text{Cos}x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{Cos}^۲x=۱-\text{Sin}^۲x=۱-(-\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۵}{۹} \Rightarrow \text{Cos}x=\pm\frac{\sqrt{۵}}{۳} \xrightarrow[\text{Cos}x<۰]{\text{x در ناحیهٔ سوم}} \text{Cos}x=-\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

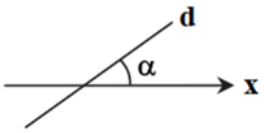
بنابراین خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$۳\text{Sin}^۲x+\text{Cos}x=۳\times\frac{۴}{۹}-\frac{\sqrt{۵}}{۳}=\frac{۴-\sqrt{۵}}{۳}$$

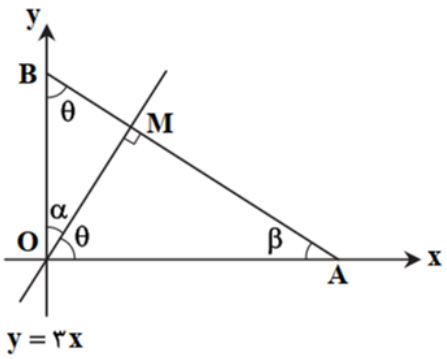
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۰ نکته: اگر α زاویه‌ای باشد که خط d با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط d} = \tan\alpha$$



با توجه به شکل داریم:



$$y=۳x \Rightarrow \text{شیب خط}=۳ \Rightarrow \tan\theta=۳$$

$$\overset{\triangle}{OMA}: \tan\theta=\frac{AM}{OM}=۳ \Rightarrow AM=۳OM \quad (۱)$$

$$OA^۲=OM^۲+AM^۲ \Rightarrow OA^۲=OM^۲+۹OM^۲=۱۰OM^۲$$

$$\Rightarrow OA=\sqrt{۱۰}OM \quad (۲)$$

$$\text{Cos}\beta=\frac{AM}{OA}$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \text{Cos}\beta=\frac{۳OM}{\sqrt{۱۰}OM}=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}} \text{ و } \text{Sin}\beta=\frac{OM}{OA}=\frac{OM}{\sqrt{۱۰}OM}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

از طرفی داریم:

$$\left.\begin{matrix}\beta+\theta=۹۰^\circ \\ \alpha+\theta=۹۰^\circ\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta \Rightarrow \text{Sin}\alpha=\text{Sin}\beta$$

پس حاصل برابر است با:

$$\text{Sin}\alpha\text{Cos}\beta=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\times\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳}{۱۰}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۱ نکته: $\text{Cos}^۲ x = ۱ - \text{Sin}^۲ x$, $\text{Sin}^۲ x = ۱ - \text{Cos}^۲ x$

نکته: برای هر زاویهٔ دلخواه x داریم: $-۱ \le \text{Cos}\, x \le ۱$, $-۱ \le \text{Sin}\, x \le ۱$

ابتدا با توجه به کسر اول داریم:

$$\frac{۳\,\text{Sin}\, x + \text{Sin}\, x\,\text{Cos}\, x}{۲ - ۲\,\text{Cos}^۲ x} < ۰ \Rightarrow \frac{\text{Sin}\, x(۳ + \text{Cos}\, x)}{۲(۱ - \text{Cos}^۲ x)} < ۰ \Rightarrow \frac{\text{Sin}\, x(۳ + \text{Cos}\, x)}{۲\,\text{Sin}^۲ x} < ۰ \Rightarrow \frac{۳ + \text{Cos}\, x}{\text{Sin}\, x} < ۰$$

با توجه به اینکه $-۱ \le \text{Cos}\, x \le ۱$، در نتیجه $۲ \le ۳ + \text{Cos}\, x \le ۴$، بنابراین صورت کسر همواره مثبت است و چون حاصل کسر منفی است، پس $\text{Sin}\, x < ۰$.

حالا با توجه به عبارت دوم داریم:

$$\text{Sin}\, x \cdot \tan x - \frac{۱}{\text{Cos}\, x} > ۰ \Rightarrow \frac{\text{Sin}^۲ x}{\text{Cos}\, x} - \frac{۱}{\text{Cos}\, x} > ۰ \Rightarrow \frac{\text{Sin}^۲ x - ۱}{\text{Cos}\, x} > ۰ \Rightarrow \frac{-\text{Cos}^۲ x}{\text{Cos}\, x} > ۰ \Rightarrow \text{Cos}\, x < ۰$$

$\xrightarrow{\text{Sin}\, x < ۰}$ x فقط در ناحیهٔ سوم است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۲ نکته: در حالت کلی برای هر عدد صحیح k داریم:

$$\text{Sin}(۲k\pi + \alpha) = \text{Sin}\,\alpha \qquad \text{Sin}(۲k\pi - \alpha) = -\text{Sin}\,\alpha$$
$$\text{Cos}(۲k\pi + \alpha) = \text{Cos}\,\alpha \qquad \text{Cos}(۲k\pi - \alpha) = \text{Cos}\,\alpha$$
$$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan\alpha \qquad \tan(۲k\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\text{Cot}(۲k\pi + \alpha) = \text{Cot}\,\alpha \qquad \text{Cot}(۲k\pi - \alpha) = -\text{Cot}\,\alpha$$

نکته: $\text{Sin}(\pi - \alpha) = \text{Sin}\,\alpha$, $\text{Cos}(\pi - \alpha) = -\text{Cos}\,\alpha$

ابتدا حاصل هر کدام از نسبت‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{Cos}\frac{۱۶\pi}{۳} = \text{Cos}(۶\pi - \frac{۲\pi}{۳}) = \text{Cos}(\frac{۲\pi}{۳}) = \text{Cos}(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲۳\pi}{۶} = \tan(۴\pi - \frac{\pi}{۶}) = \tan(-\frac{\pi}{۶}) = -\tan\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{Sin}\frac{۱۴\pi}{۳} = \text{Sin}(۴\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = \text{Sin}\frac{۲\pi}{۳} = \text{Sin}(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس حاصل برابر است با:

$$A = -\frac{۱}{۲} - (-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -\frac{۱}{۲} + \frac{۳}{۳ \times ۲} = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۳

نکته : $\text{Sin}(\pi+\alpha)=-\text{Sin}\,\alpha \quad , \quad \text{Cos}(۲\pi\pm\alpha)=\text{Cos}\,\alpha$

نکته : $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\text{Cos}\,\alpha$

نکته : $۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}x}$

ابتدا داریم:

$$\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)=\text{Sin}(\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Cos}(\alpha-۲\pi)=\text{Cos}(۲\pi-\alpha)=\text{Cos}\,\alpha$$

اکنون داریم:

$$-۴\text{Cos}\,\alpha+\text{Cos}\,\alpha=۱\Rightarrow -۳\text{Cos}\,\alpha=۱\Rightarrow \text{Cos}\,\alpha=-\frac{۱}{۳}$$

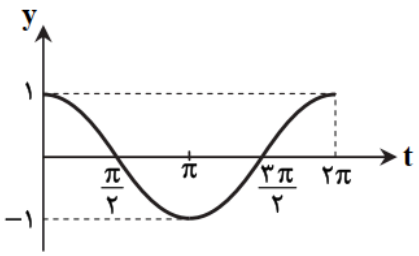
$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\text{Cos}^{۲}\alpha}\Rightarrow ۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\frac{۱}{۹}}\Rightarrow \tan^{۲}\alpha=۸\xrightarrow{\alpha\text{ در ربع سوم}}\tan\alpha=\sqrt{۸}$$

$$\Rightarrow \text{Cot}\,\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۸}}\Rightarrow \tan\alpha+۴\text{Cot}\,\alpha=\sqrt{۸}+\frac{۴}{\sqrt{۸}}=۲\sqrt{۲}+\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۶\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۴

نکته: نمودار تابع $f(x)=\text{Cos}\,x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌شکل روبه‌رو است.



با توجه به نمودار، داریم:

$$\begin{cases} f(۰)=۵\Rightarrow a\text{Cos}(۰)+b=۵\Rightarrow a+b=۵ \\ f(\pi)=۱\Rightarrow a\text{Cos}\,\pi+b=۱\Rightarrow -a+b=۱ \end{cases}\Rightarrow b=۳\ ,\ a=۲$$

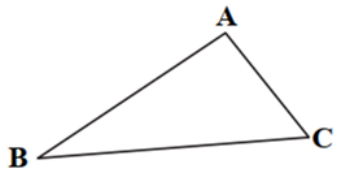
بنابراین:

$$f(\frac{a\pi}{b})=f(\frac{۲\pi}{۳})=۲\text{Cos}\frac{۲\pi}{۳}+۳=۲\text{Cos}(\pi-\frac{\pi}{۳})+۳=۲(-\frac{۱}{۲})+۳=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۵ نکته: در دایره‌ای به شعاع r، اگر L طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ (برحسب رادیان) باشد، آنگاه: $L = r\cdot\theta$

نکته: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن دو ضلع.

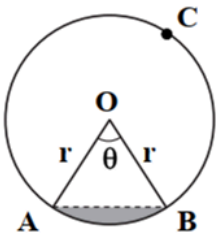


$$\text{مساحت } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{۱}{۲}\times AB\times BC\times \sin B$$

$$\text{محیط دایره} = ۲\pi r = ۶\pi$$

$$\overset{\frown}{ACB} = ۵\pi \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۶\pi - ۵\pi = \pi$$

$$\overset{\frown}{AB} = r\cdot\theta \Rightarrow \pi = ۳\times\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳} = ۶۰^\circ$$



پس مساحت قطاع OAB برابر $\frac{۱}{۶}$ مساحت دایره است، زیرا: $۶۰^\circ = \frac{۳۶۰^\circ}{۶}$

اکنون داریم:

$$\text{مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده} = (\text{مساحت دایره}\times\frac{۱}{۶}) - (\text{مساحت مثلث } OAB)$$

$$\text{مساحت ناحیهٔ سایه‌خورده} = \frac{۱}{۶}\times\pi r^۲ - \frac{۱}{۲}\times r\times r\times \sin\theta = \frac{۱}{۶}\times ۹\pi - \frac{۱}{۲}\times ۳\times ۳\times \sin ۶۰^\circ = \frac{۳\pi}{۲} - \frac{۹\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۶\pi - ۹\sqrt{۳}}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۶ نکته: توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $c+|a|$، مقدار مینیمم $c-|a|$ و دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

تابع f بر خط $y = -۳$ مماس شده است؛ یعنی $y = -۳$ یا بیشترین مقدار تابع است و یا کمترین مقدار تابع. با توجه به آنکه $a < ۰$، داریم:

$$\max = ۳a + \overbrace{|a-۳|}^{\text{منفی}} = ۳a - a + ۳ = ۲a + ۳$$

$$\min = ۳a - \underbrace{|a-۳|}_{\text{منفی}} = ۴a - ۳$$

اکنون دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\text{حالت اول}: ۲a+۳ = -۳ \Rightarrow ۲a = -۶ \xrightarrow{a<۰} a = -۳ \quad \checkmark$$

$$\text{حالت دوم}: ۴a - ۳ = -۳ \Rightarrow ۴a = ۰ \xrightarrow{a<۰} a = ۰ \quad \times$$

بنابراین داریم:

$$a = -۳ \Rightarrow \begin{cases} \max = -۳ \\ \min = ۴a - ۳ = -۱۵ \end{cases}$$

پس خط $y = -۱۵$، نیز بر تابع f مماس است.

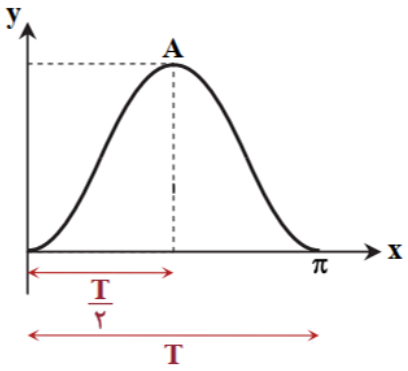
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۷ نکته: توابع $y=aSinbx+c$ و $y=aCosbx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $c+|a|$ و مقدار مینیمم $c-|a|$ و دورهٔ تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow 2+aCos0=0 \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow a=-2 \\ T=\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow b=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=2-2Cos2x$$

اکنون مختصات نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow x_A=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{2})=2-2Cos\pi=4$$

البته می‌توان نوشت:

$$y_A=y_{max}=2+|-2|=4$$

حالا شیب OA را به‌دست می‌آوریم:

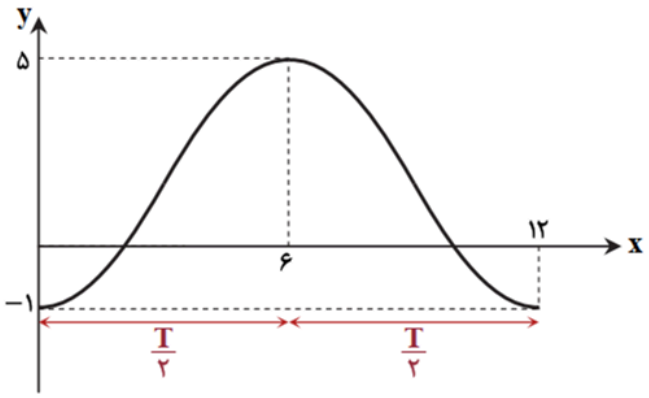
$$\begin{cases} A(\frac{\pi}{2},4) \\ O(0,0) \end{cases} \Rightarrow m_{OA}=\frac{4}{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{\pi}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۸ نکته: توابع $y=aSinbx+c$ و $y=aCosbx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $c+|a|$، مقدار مینیمم $c-|a|$ و دورهٔ تناوب $T=\frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

راه‌حل اول:

با محاسبهٔ مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب تابع داریم:



$$y=-3Cos(\frac{\pi}{6}x)+2 \Rightarrow \begin{cases} max=2+|-3|=5 \\ min=2-|-3|=-1 \\ T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12 \end{cases}$$

با توجه به اینکه ضریب $Cos(\frac{\pi}{6}x)$، منفی است، نمودار $Cos(\frac{\pi}{6}x)$ نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌شود. یعنی min آن روی محور عرض‌ها قرار دارد، پس نمودار تابع به‌صورت بالا است و در بازهٔ $(6,12)$ یا هر زیرمجموعهٔ آن نزولی اکید است. بنابراین حداقل α برابر ۶ است.

راه‌حل دوم:

توابع $y=aSinbx+c$ و $y=aCosbx+c$، در یک دوره تناوب، در بازه‌های $(0,\frac{T}{2})$ و $(\frac{T}{2},T)$ اکیداً یکنوا هستند.

چون دورهٔ تناوب تابع $T=12$ است، تابع در بازهٔ $(6,12)$ اکیداً یکنوا است و با توجه به منفی بودن ضریب $Cos(\frac{\pi}{6}x)$، تابع در این بازه اکیداً نزولی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۹

نکته: $\text{Cos}2\theta = \text{Cos}^2\theta - \text{Sin}^2\theta \ , \ \text{Sin}2\theta = 2\text{Sin}\theta\text{Cos}\theta$

ابتدا داریم: $\text{Sin}\theta + \text{Cos}\theta = \sqrt{0/6} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\text{Sin}\theta + \text{Cos}\theta)^2 = (\sqrt{0/6})^2$

$$\Rightarrow \underbrace{\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta}_{1} + 2\text{Sin}\theta\text{Cos}\theta = 0/6 \Rightarrow 1 + \text{Sin}2\theta = 0/6 \Rightarrow \text{Sin}2\theta = -0/4 \quad (1)$$

اکنون خواستهٔ سؤال را به‌دست می‌آوریم: $\text{Sin}^4\theta - \text{Cos}^4\theta = (\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta)(\text{Sin}^2\theta - \text{Cos}^2\theta) = \text{Sin}^2\theta - \text{Cos}^2\theta = -\text{Cos}2\theta$

پس کافی است مقدار $\text{Cos}2\theta$ را با استفاده از رابطهٔ (۱) به‌دست آوریم:

$$\text{Cos}2\theta = \pm\sqrt{1 - \text{Sin}^2 2\theta} = \pm\sqrt{1 - (-0/4)^2} = \pm\sqrt{1 - 0/16} = \pm\sqrt{0/84} = \pm 2\sqrt{0/21}$$

با توجه به گزینه‌ها حاصل عبارت خواسته‌شده برابر $-2\sqrt{0/21}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۰

نکته: $\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2 x - 1$

نکته: $\text{Sin}2x = 2\text{Sin}x\text{Cos}x$

نکته: اگر زاویه‌های α و β متمم باشند، داریم: $\text{Sin}\alpha = \text{Cos}\beta \ , \ \text{Sin}\beta = \text{Cos}\alpha$

ابتدا داریم:

$$\text{Cos}(x - \pi) = \text{Cos}(\pi - x) = -\text{Cos}x \qquad \text{Sin}(2x - \frac{3\pi}{2}) = -\text{Sin}(\frac{3\pi}{2} - 2x) = \text{Cos}2x$$

اکنون ضابطهٔ $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\text{Cos}2x - \text{Cos}x}{\text{Sin}2x + \text{Sin}x - 2\text{Cos}x - 1} = \frac{2\text{Cos}^2 x - 1 - \text{Cos}x}{2\text{Sin}x\text{Cos}x + \text{Sin}x - (2\text{Cos}x + 1)} = \frac{2\text{Cos}^2 x - \text{Cos}x - 1}{\text{Sin}x(2\text{Cos}x + 1) - (2\text{Cos}x + 1)}$$

$$= \frac{(2\text{Cos}x + 1)(\text{Cos}x - 1)}{(2\text{Cos}x + 1)(\text{Sin}x - 1)} = \frac{\text{Cos}x - 1}{\text{Sin}x - 1}$$

با توجه به اینکه $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$، دو زاویهٔ $\frac{\pi}{10}$ و $\frac{2\pi}{5}$ متمم هستند، پس: $\text{Sin}\frac{2\pi}{5} = \text{Cos}\frac{\pi}{10} \ , \ \text{Cos}\frac{2\pi}{5} = \text{Sin}\frac{\pi}{10}$

حال مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$f(\frac{\pi}{10})f(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\text{Cos}\frac{\pi}{10} - 1}{\text{Sin}\frac{\pi}{10} - 1} \times \frac{\text{Cos}\frac{2\pi}{5} - 1}{\text{Sin}\frac{2\pi}{5} - 1} = \frac{\text{Cos}\frac{\pi}{10} - 1}{\text{Sin}\frac{\pi}{10} - 1} \times \frac{\text{Sin}\frac{\pi}{10} - 1}{\text{Cos}\frac{\pi}{10} - 1} = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۱ نکته: توابع $y=aSinbx+c$ و $y=aCosbx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$، مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

نکته: $Cos۲x=۱-۲Sin^۲x$, $Sin^۲x=\frac{۱-Cos۲x}{۲}$ $\qquad$ $Cos۲x=۲Cos^۲x-۱$, $Cos^۲x=\frac{۱+Cos۲x}{۲}$

راه‌حل اول: با توجه به نمودار f داریم:

$$f(۰)=۲ \Rightarrow aCos^۲(۰)=۲ \Rightarrow a\times ۱=۲ \Rightarrow a=۲$$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع f برابر ۲ است. بنابراین داریم:

$$f(x)=۲Cos^۲bx=۲(\frac{۱+Cos(۲bx)}{۲})=۱+Cos(۲bx) \quad و \quad T=\frac{۲\pi}{|۲b|} \Rightarrow ۲=\frac{\pi}{|b|} \Rightarrow b=\pm\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۲}$$

اکنون داریم:

$$g(x)=bSin^۲ax=\frac{\pi}{۲}Sin^۲۲x=\frac{\pi}{۲}(\frac{۱-Cos۴x}{۲})=\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}Cos۴x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

با توجه به نمودارهای داده‌شده فقط گزینهٔ ۴ می‌تواند نمودار g باشد.

راه‌حل دوم:

نکته: توابع $y=aSin^۲bx$ و $y=aCos^۲bx$، دارای دورهٔ تناوب $T=\frac{\pi}{|b|}$ هستند.

$$f(۰)=۲ \Rightarrow a=۲$$

$$f(x)=aCos^۲bx \Rightarrow T=\frac{\pi}{|b|}=۲ \Rightarrow |b|=\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{b>۰} b=\frac{\pi}{۲}$$

$$g(x)=\frac{\pi}{۲}Sin^۲۲x \Rightarrow T=\frac{\pi}{۲}$$

فقط گزینهٔ ۴ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۲ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $Sinx=Sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ است که $k\in\mathbb{Z}$.

با توجه به اتحاد مثلثاتی $Cos^۲x=-Sin^۲x+۱$ داریم:

$$۲(-Sin^۲x+۱)+۳Sinx=۰ \Rightarrow -۲Sin^۲x+۳Sinx+۲=۰$$

$$Sinx=t \Rightarrow ۲t^۲-۳t-۲=۰ \Rightarrow t=\frac{۳\pm\sqrt{۲۵}}{۴} \xrightarrow{-۱\le t\le ۱} \begin{cases} t=۲ \ \times \\ t=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$Sinx=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{۰<x<۲\pi} x=\pi+\frac{\pi}{۶} \ , \ ۲\pi-\frac{\pi}{۶}$$

$$x=\frac{۷\pi}{۶} \ , \ \frac{۱۱\pi}{۶} \Rightarrow \text{مجموع جواب‌های معادله} = \frac{۷\pi+۱۱\pi}{۶}=۳\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۳ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x = \cos \alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که: $k \in \mathbb{Z}$

نکته : $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2(\frac{3x}{2}) = \cos^2(x) \Rightarrow \frac{1+\cos 3x}{2} = \frac{1+\cos 2x}{2} \Rightarrow 1+\cos 3x = 1+\cos 2x \Rightarrow \cos 3x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi & (I) \\ x = \frac{2k\pi}{5} & (II) \end{cases}$$

با توجه به شکل جواب‌های کلی دستهٔ (I) زیرمجموعه‌ای از جواب‌های کلی دستهٔ (II) هستند، پس جواب معادله به‌صورت $x = \frac{2}{5}k\pi$ است و $a = \frac{2}{5} = 0/4$.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۴ نکته: توابع $y = a\sin bx + c$ و $y = a\cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $T = \frac{2\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به ضابطهٔ تابع داده‌شده، مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب را به‌دست می‌آوریم:

$$y = a + b\sin(\frac{2\pi}{b}x) \Rightarrow \begin{cases} max = a + |b| \\ min = a - |b| \\ T = \frac{2\pi}{|\frac{2\pi}{b}|} = |b| \end{cases}$$

اکنون با توجه به معلومات داده‌شده داریم:

$$a + |b| = 4(a - |b|) \Rightarrow a + |b| = 4a - 4|b| \Rightarrow 3a = 5|b| \quad (*)$$

$$(a + |b|) - (a - |b|) - 8 = |b| \Rightarrow a + |b| - a + |b| - 8 = |b| \Rightarrow |b| = 8 \Rightarrow b = \pm 8 \xrightarrow{(*)} 3a = 5 \times 8 \Rightarrow a = \frac{40}{3}$$

بنابراین $ab = \frac{40}{3} \times (\pm 8) = \pm \frac{320}{3}$ و با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ ۱ قابل‌قبول است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۵

نکته : $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ ، $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

نکته : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

ابتدا ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \sin^5 x\cos x - \cos^5 x\sin x = \sin x\cos x(\sin^4 x - \cos^4 x) = \underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{1}{2}\sin 2x}\underbrace{(\sin^2 x - \cos^2 x)}_{-\cos 2x}\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\underbrace{\sin 2x\cos 2x}_{\frac{1}{2}\sin 4x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}\sin 4x$$

اکنون مقدار تابع را به‌ازای $x = \frac{\pi}{24}$ به‌دست می‌آوریم:

$$f(\frac{\pi}{24}) = -\frac{1}{4}\sin(4\times\frac{\pi}{24}) = -\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{4}\times\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۶

نکته : $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

نکته : $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$ ، $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

زاویهٔ 66° و زاویهٔ 24° متمم یکدیگر هستند. بنابراین:

$$\sin 66^\circ = \cos 24^\circ$$

اکنون عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A = \sqrt{\frac{1-\cos 48^\circ}{1+\cos 24^\circ}} = \sqrt{\frac{2\sin^2 24^\circ}{2\cos^2 12^\circ}} = \left|\frac{\sin 24^\circ}{\cos 12^\circ}\right| \xrightarrow[\cos 12^\circ>0]{\sin 24^\circ>0} A = \frac{\sin 24^\circ}{\cos 12^\circ} = \frac{2\sin 12^\circ\cos 12^\circ}{\cos 12^\circ} = 2\sin 12^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۷

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

ابتدا معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1-\sin x}{\cos x} \xrightarrow[\cos x\neq 0]{\sin x\neq 1} \cos^2 x = (1-\sin x)^2$$

با توجه به رابطهٔ $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ داریم:

$$1-\sin^2 x = 1-2\sin x+\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x-\sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x-1) = 0$$

$$\xrightarrow{\sin x\neq 1} \sin x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = 2k\pi+\pi \end{cases} \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{0\le x\le 3\pi} x = 0,\pi,2\pi,3\pi$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر $\pi+2\pi+3\pi = 6\pi$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۸ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x = \cos\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

ابتدا $x = \frac{2\pi}{3}$ را در معادله قرار می‌دهیم و مقدار a را به‌دست می‌آوریم:

$$\sin\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = a + \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sin(\pi+\frac{\pi}{3}) + \sin(\pi-\frac{\pi}{3}) = a + \cos(\pi-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = a - \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

اکنون معادله را حل می‌کنیم:

$$\sin 2x + \sin x = \frac{1}{2} + \cos x \Rightarrow 2\sin x\cos x + \sin x = \frac{1}{2} + \cos x$$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos x + 1) = \frac{1}{2}(1 + 2\cos x) \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \xrightarrow{0<x<2\pi} x = \frac{2\pi}{3}\ ,\ x = \frac{4\pi}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{0<x<2\pi} x = \frac{\pi}{6}\ ,\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های دیگر معادله برابر است با:

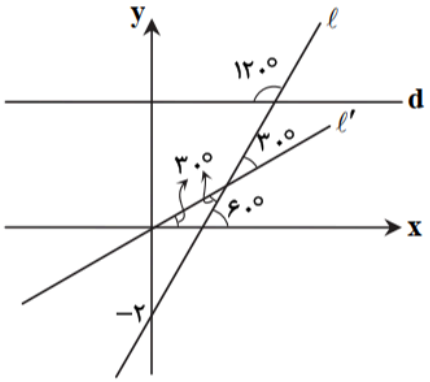
$$\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۹ نکته: اگر خطی با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ α تشکیل دهد، شیب آن برابر $\tan\alpha$ است.

خط ℓ با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ 60° تشکیل می‌دهد، پس شیب آن برابر $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$y = \sqrt{3}x - 2$ (توجه کنید که عرض از مبدأ خط ℓ، برابر ۲- است.)



به همین ترتیب طبق شکل، شیب خط ℓ' برابر $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و معادلهٔ آن به‌صورت $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ است. اکنون می‌توان از دستگاه $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2 \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases}$ مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط ℓ و ℓ' را تعیین کرد:

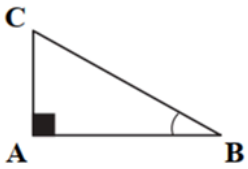
$$\sqrt{3}x - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}x = 2 \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 1$$

پس مختصات نقطهٔ تقاطع به‌صورت $(\sqrt{3}, 1)$ است. بنابراین مجموع طول و عرض این نقطه برابر است با:

$$\sqrt{3} + 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۰ نکته: می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور، تانژانت آن زاویه است و همچنین کتانژانت معکوس تانژانت است:

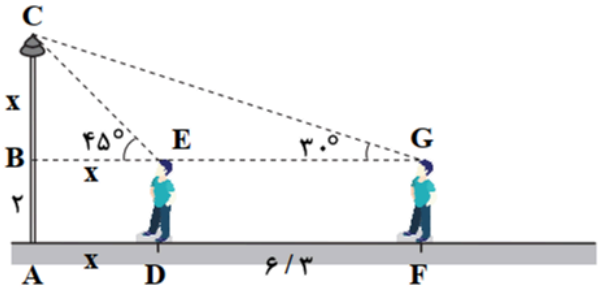


$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{Cot}\, \hat{B} = \frac{AB}{AC}$$

با توجه به شکل، رضا ابتدا نوک تیر را با زاویهٔ ۴۵° می‌بیند، پس داریم:

$$\tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{BE} \Rightarrow ۱ = \frac{BC}{BE} \Rightarrow BC = BE$$



اگر اندازهٔ BE را برابر x فرض کنیم، داریم:

$$BC = BE = x$$

سپس رضا ۶/۳ متر از تیر دور می‌شود، پس:

$$BG = x + ۶/۳$$

$$\overset{\triangle}{CGB} : \text{Cot}\, ۳۰^\circ = \frac{BG}{BC} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{x + ۶/۳}{x} \Rightarrow \sqrt{۳}x = x + ۶/۳$$

$$\xrightarrow{\sqrt{۳} \simeq ۱/۷} ۱/۷x = x + ۶/۳ \Rightarrow ۰/۷x = ۶/۳ \Rightarrow x \simeq ۹$$

ارتفاع تیر = AC = ۹ + ۲ = ۱۱ متر

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۱ نکته: $\text{Cos}(\pi + \alpha) = -\text{Cos}\,\alpha$ ، $\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\text{Cos}\,\alpha$ ، $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \text{Cos}\,\alpha$ ، $\text{Cos}(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha) = -\text{Sin}\,\alpha$

با استفاده از نکتهٔ بالا، داریم:

$$A = \frac{۲\text{Cos}(\pi + \frac{\pi}{۹}) - ۳\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲} + \frac{\pi}{۹})}{\text{Sin}(۲\pi + \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۹}) + ۲\text{Cos}(\frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۹})} = \frac{-۲\text{Cos}\frac{\pi}{۹} + ۳\text{Cos}\frac{\pi}{۹}}{\text{Cos}\frac{\pi}{۹} - ۲\text{Sin}\frac{\pi}{۹}}$$

$$= \frac{\text{Cos}\frac{\pi}{۹}}{\text{Cos}\frac{\pi}{۹} - ۲\text{Sin}\frac{\pi}{۹}} \overset{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \text{Sin}\frac{\pi}{۹}}{=\!=\!=} \frac{\frac{\text{Cos}\frac{\pi}{۹}}{\text{Sin}\frac{\pi}{۹}}}{\frac{\text{Cos}\frac{\pi}{۹}}{\text{Sin}\frac{\pi}{۹}} - \frac{۲\text{Sin}\frac{\pi}{۹}}{\text{Sin}\frac{\pi}{۹}}} = \frac{\text{Cot}\frac{\pi}{۹}}{\text{Cot}\frac{\pi}{۹} - ۲} = \frac{a}{a - ۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۲

نکته: $\begin{cases}\text{Sin}(-\alpha)=-\text{Sin}\,\alpha\\ \text{Sin}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Cos}\,\alpha\end{cases}$ نکته: $\begin{cases}\text{Cos}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Sin}\,\alpha\\ \text{Cos}(۲k\pi\pm\alpha)=\text{Cos}\,\alpha \quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

ابتدا خواستهٔ سؤال را ساده می‌کنیم:

$$\text{Cos}(۲\pi+\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Cos}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Sin}\,\alpha$$

$$\text{Sin}(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-\text{Cos}\,\alpha$$

$$\text{Cos}(\frac{۵\pi}{۲}-\alpha)\text{Sin}(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$$

حال طرفین رابطهٔ داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\text{Sin}\,\alpha+\text{Cos}\,\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow(\text{Sin}\,\alpha+\text{Cos}\,\alpha)^{۲}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

$$\underbrace{\text{Sin}^{۲}\alpha+\text{Cos}^{۲}\alpha}_{۱}+۲\,\text{Sin}\alpha\,\text{Cos}\,\alpha=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha=-\frac{۲}{۳}\Rightarrow \text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow -\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha=\frac{۱}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۳

نکته: نسبت‌های مثلثاتی دو برابر کمان به‌صورت زیر هستند:

$$۱)\,\text{Sin}۲\alpha=۲\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha$$

$$۲)\,\text{Cos}۲\alpha=\text{Cos}^{۲}\alpha-\text{Sin}^{۲}\alpha=۲\text{Cos}^{۲}\alpha-۱=۱-۲\text{Sin}^{۲}\alpha$$

نکته: در توابع $y=a\text{Sin}(bx)+c$ و $y=a\text{Cos}(bx)+c$، دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ هستند.

می‌توان تابع را به‌صورت زیر نوشت:

$$y=\frac{۱}{۲}(\overbrace{۲\text{SinxCosx}}^{\text{Sin}۲x})(\overbrace{۲\text{Cos}^{۲}x-۱}^{\text{Cos}۲x})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}(۲\text{Sin}۲x\text{Cos}۲x)=\frac{۱}{۴}\text{Sin}۴x$$

بنابراین دورهٔ تناوب آن برابر با $\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$ و نیز مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن به‌ترتیب برابر با $\frac{۱}{۴}$ و $-\frac{۱}{۴}$ هستند، پس داریم:

$$\frac{\text{دورهٔ تناوب}}{\text{اختلاف بیشترین و کمترین مقدار تابع}}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{\frac{۱}{۴}-(-\frac{۱}{۴})}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۴ نکته: $\text{Cos}۲\alpha = ۲\text{Cos}^۲\alpha - ۱$

نکته: توابع $y = a\text{Sin}bx + c$ و $y = a\text{Cos}bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$، مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

ابتدا تابع f را با استفاده از اتحاد $\text{Cos}^۲x = \frac{\text{Cos}۲x + ۱}{۲}$، به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = a + \text{Cos}^۲bx = a + \frac{\text{Cos}۲bx + ۱}{۲} = (a + \frac{۱}{۲}) + \frac{۱}{۲}\text{Cos}۲bx$$

مقدار مینیمم تابع برابر با ۲ است، پس:

$$y_A = ۲ \Rightarrow \min = ۲ \Rightarrow (a + \frac{۱}{۲}) - |\frac{۱}{۲}| = ۲ \Rightarrow a = ۲$$

همچنین طول نقطهٔ A برابر با $\frac{۴\pi}{۳}$ است. با توجه به نمودار، مشخص است که دورهٔ تناوب تابع دو برابر طول نقطهٔ A است. یعنی:

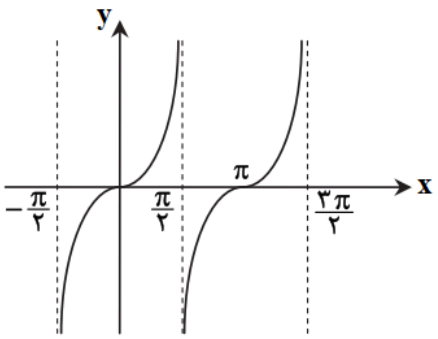
$$T = \frac{۸\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|۲b|} = \frac{۸\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{|b|} = \frac{۸}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۸}$$

بنابراین مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$|ab| = |۲ \times \frac{۳}{۸}| = \frac{۳}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۵ نکته: نمودار تابع $f(x)=\tan x$ به‌صورت زیر است:



در تابع $y=\tan x$ با تبدیل x به bx تابع $y=\tan(bx)$ حاصل می‌شود.

بنابراین خط $x=\frac{\pi}{۲}$ در تابع $y=\tan x$ به خط $x=۲\pi$، در تابع $f(x)=a\tan(bx)$ تبدیل شده است، پس:

$$\frac{\pi}{۲}\to ۲\pi \Rightarrow ۲\pi b=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow b=\frac{۱}{۴} \Rightarrow f(x)=a\tan(\frac{x}{۴})$$

نقطهٔ $A(\frac{۲\pi}{۳},۲\sqrt{۳})$ در تابع f صدق می‌کند:

$$f(\frac{۲\pi}{۳})=۲\sqrt{۳} \Rightarrow a\tan(\frac{۱}{۴}\times\frac{۲\pi}{۳})=۲\sqrt{۳} \Rightarrow a\tan\frac{\pi}{۶}=۲\sqrt{۳} \Rightarrow a\times\frac{\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳} \Rightarrow a=۶ \ , \ f(x)=۶\tan(\frac{x}{۴})$$

$x=\pi$ در $y=\tan x$، به $x=c$ در f تبدیل شده است، پس:

$$\frac{x}{۴}=\pi \Rightarrow x=۴\pi \Rightarrow c=۴\pi$$

بنابراین مقدار خواسته‌شدهٔ سؤال برابر است با:

$$abc=۶\times\frac{۱}{۴}\times۴\pi=۶\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۶ نکته: $Cos۲\alpha=۱-۲Sin^{۲}\alpha$, $Sin۲\alpha=۲SinCos\alpha$

طرفین رابطهٔ $Sin\alpha-Cos\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(Sin\alpha-Cos\alpha)^{۲}=(\frac{\sqrt{۲}}{۳})^{۲}$$

$$\Rightarrow Sin^{۲}\alpha+Cos^{۲}\alpha-۲SinCos\alpha=\frac{۲}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱-Sin۲\alpha=\frac{۲}{۹} \Rightarrow Sin۲\alpha=۱-\frac{۲}{۹}=\frac{۷}{۹}$$

اکنون مقدار خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$Cos۴\alpha=Cos۲(۲\alpha)=۱-۲Sin^{۲}(۲\alpha)=۱-۲\times\frac{۴۹}{۸۱}=\frac{۸۱-۹۸}{۸۱}=-\frac{۱۷}{۸۱}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۷ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\text{Sin}\,x = \text{Sin}\,\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

نکته: $\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \text{Cos}\alpha$

با توجه به نکات، می‌توان نوشت:

$$\text{Sin}3x = \text{Cos}2x \Rightarrow \text{Sin}3x = \text{Sin}(\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{(4k+1)\pi}{10} \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

پس داریم:

$$x = \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{17\pi}{10}, \frac{21\pi}{10}, \cdots$$

بنابراین سومین ریشهٔ مثبت معادله برابر با $\frac{9\pi}{10}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۸ ابتدا عبارت‌های صورت و مخرج را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{Sin}(\frac{5\pi}{8}) = \text{Sin}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) = \text{Cos}\frac{\pi}{8} \\ 3\text{Cos}\frac{7\pi}{8} = 3\text{Cos}(\pi - \frac{\pi}{8}) = -3\text{Cos}\frac{\pi}{8} \\ 2\text{Sin}\frac{3\pi}{8} = 2\text{Sin}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) = 2\text{Cos}\frac{\pi}{8} \\ \text{Cos}(\frac{9\pi}{8}) = \text{Cos}(\pi + \frac{\pi}{8}) = -\text{Cos}\frac{\pi}{8} \end{cases}$$

بنابراین با جای‌گذاری عبارت‌های به‌دست آمده در عبارت A، داریم:

$$A = \frac{\text{Cos}\frac{\pi}{8} - 3\text{Cos}\frac{\pi}{8}}{2\text{Cos}\frac{\pi}{8} - \text{Cos}\frac{\pi}{8}} = \frac{-2\text{Cos}\frac{\pi}{8}}{\text{Cos}\frac{\pi}{8}} = -2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۹ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\text{Cos}x=\text{Cos}\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

نکته: $\text{Cos}(\frac{\pi}{2}+x)=-\text{Sin}x$

معادلهٔ داده‌شده را ساده و حل می‌کنیم:

$$\text{Cos}3x+\text{Sin}x=0 \Rightarrow \text{Cos}3x=-\text{Sin}x \Rightarrow \text{Cos}3x=\text{Cos}(\frac{\pi}{2}+x) \Rightarrow \begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+x \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ 3x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8} \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

جواب‌های این معادله در بازهٔ $[0,\pi]$، برابر با $\frac{\pi}{4}$، $\frac{3\pi}{8}$ و $\frac{7\pi}{8}$ است که مجموع جواب‌ها برابر با $\frac{3\pi}{2}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۰ نکته: $\text{Sin}^2\alpha+\text{Cos}^2\alpha=1$

نکته: $\text{Sin}2\alpha=2\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha$

ابتدا طرفین رابطهٔ داده‌شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\text{Sin}\alpha-\text{Cos}\alpha)^2=(\frac{\sqrt{5}}{5})^2 \Rightarrow \underbrace{\text{Sin}^2\alpha+\text{Cos}^2\alpha}_{1}-2\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha=\frac{1}{5} \Rightarrow 1-2\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha=\frac{1}{5} \Rightarrow 1-\text{Sin}2\alpha=\frac{1}{5} \Rightarrow \text{Sin}2\alpha=\frac{4}{5}$$

اکنون باید مقدار $\text{Cos}2\alpha$ را به‌دست آوریم: (۱)

$$\text{Cos}^2 2\alpha=1-\text{Sin}^2 2\alpha \Rightarrow \text{Cos}^2 2\alpha=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \Rightarrow \text{Cos}2\alpha=\pm\frac{3}{5}$$

حالا باید علامت $\text{Cos}2\alpha$ را تعیین کنیم:

$$\text{Sin}\alpha-\text{Cos}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{Sin}\alpha>\text{Cos}\alpha$$

انتهای کمان α در ربع اول است و $\text{Sin}\alpha>\text{Cos}\alpha$، بنابراین:

$$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi \Rightarrow \text{Cos}2\alpha<0 \xrightarrow{(1)} \text{Cos}2\alpha=-\frac{3}{5}$$

پس مقدار خواسته‌شدهٔ سؤال برابر است با:

$$\text{Sin}2\alpha+\text{Cos}2\alpha=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}=0/2$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۱

نکته: $\text{Sin}(\pi+\alpha)=-\text{Sin}\,\alpha\ ,\ \text{Sin}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Cos}\,\alpha$

نکته: $\text{Cos}\,۲\alpha=۲\text{Cos}^{۲}\alpha-۱$

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\text{Cos}\,x=\text{Cos}\,\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ است. $(k\in\mathbb{Z})$

ابتدا داریم:

$$\text{Sin}(۲x-\frac{۳\pi}{۲})=-\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}-۲x)=-\text{Sin}(\pi+\frac{\pi}{۲}-۲x)=\text{Cos}\,۲x$$

اکنون معادله را حل می‌کنیم:

$$\text{Cos}\,۴x+\text{Sin}(۲x-\frac{۳\pi}{۲})=۲\ \Rightarrow\ \text{Cos}\,۴x+\text{Cos}\,۲x=۲$$

$$\Rightarrow\ ۲\text{Cos}^{۲}۲x-۱+\text{Cos}\,۲x=۲\ \Rightarrow\ ۲\text{Cos}^{۲}۲x+\text{Cos}\,۲x-۳=۰$$

$$\Rightarrow\ (\text{Cos}\,۲x-۱)(۲\text{Cos}\,۲x+۳)=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}\text{Cos}\,۲x=۱ & \checkmark\\ \text{Cos}\,۲x=-\frac{۳}{۲} & \times\end{cases}\quad(-۱\le\text{Cos}\,۲x\le۱)$$

$$\text{Cos}\,۲x=۱\ \Rightarrow\ \text{Cos}\,۲x=\text{Cos}\,۰\ \Rightarrow\ ۲x=۲k\pi\ \Rightarrow\ x=k\pi$$

k	-۱	۰	۱	۲
x	$-\pi$	۰	π	۲π

پس $x=-\pi,۰,\pi,۲\pi$، جواب‌های معادله در بازهٔ $[-\pi,\frac{۵\pi}{۲}]$ هستند و مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۲

نکته: $\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha=\frac{۱}{۲}\text{Sin}۲\alpha$

نکته: توابع $y=a\,\text{Sin}\,bx+c$ و $y=a\,\text{Cos}\,bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به $\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha=\frac{۱}{۲}\text{Sin}۲\alpha$، می‌توان نتیجه گرفت: $f(x)=۱+\frac{a}{۲}\text{Sin}(۲b\pi x)$

چون مینیمم تابع برابر -۱ است، پس: $-|\frac{a}{۲}|+۱=-۱\ \Rightarrow\ -|\frac{a}{۲}|=-۲\ \Rightarrow\ |a|=۴$

از طرفی چون نمودارسینوس در بازهٔ $(۰,\frac{۴}{۳})$ دو بار تکرار شده، پس $۲T=\frac{۴}{۳}$ و $T=\frac{۲}{۳}$، بنابراین داریم:

$$T=\frac{۲}{۳}\ \Rightarrow\ \frac{۲\pi}{|۲b\pi|}=\frac{۲}{۳}\ \Rightarrow\ |b|=\frac{۳}{۲}$$

از آنجا که نمودار بعد از مبدأ صعودی است، پس $ab>۰$، بنابراین:

$$\begin{cases}۲b+a=۲(\frac{۳}{۲})+۴=۷\\ \text{یا}\\ ۲b+a=۲(-\frac{۳}{۲})-۴=-۷\end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۳

نکته: $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

نکته: $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

نکته: $\cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=2k\pi\pm\alpha\ (k\in\mathbb{Z})$

با توجه به اتحاد $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$، می‌توان نوشت:

$$2\cos^2 x-3\cos x-2=0 \xrightarrow{\cos x=a} 2a^2-3a-2=0 \Rightarrow (2a-4)(a+\frac{1}{2})=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow \cos x=2 \text{ غ‌ق‌ق} \\ a=\frac{-1}{2} \Rightarrow \cos x=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

از آنجا که $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$، داریم: $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$

پس واضح است که اولین ریشهٔ مثبت معادله برابر با $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ است:

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{5\pi}{6})=\sin(\pi-\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۴

نکته: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

نکته: $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

با استفاده از رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$2\cos x=2+\sin x \Rightarrow 2\cos x-2=\sin x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4\cos^2 x-8\cos x+4=\sin^2 x$$

$$\Rightarrow 4\cos^2 x-8\cos x+4=1-\cos^2 x$$

$$\Rightarrow 5\cos^2 x-8\cos x+3=0$$

$$\Rightarrow (5\cos x-3)(\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{3}{5} \\ \cos x=1 \end{cases}$$

به‌ازای $\cos x=1$ مقدار $\sin x$ برابر صفر است و عبارت خواسته‌شده، تعریف‌نشده است. بنابراین به‌ازای $\cos x=\frac{3}{5}$، خواستهٔ سؤال را به‌دست می‌آوریم.

طبق فرض سؤال داریم:

$$2\cos x-2=\sin x \Rightarrow \frac{6}{5}-2=\sin x \Rightarrow \sin x=-\frac{4}{5}$$

بنابراین:

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{4}{3} \Rightarrow \cot x=-\frac{3}{4} \Rightarrow 9\tan^2 x+16\cot x=16-12=4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۵ نکته: توابع $y=a\,Sin\,bx+c$ و $y=a\,Cos\,bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$، مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $Sin\,x=Sin\,\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ هستند که $k\in\mathbb{Z}$.

مینیمم تابع $f(x)=a-۲\,Sin(x-\frac{۳\pi}{۴})$، برابر صفر است. بنابراین:

$$min=a-|۲|=۰\Rightarrow a-۲=۰\Rightarrow a=۲\Rightarrow f(x)=۲-۲\,Sin(x-\frac{۳\pi}{۴})$$

با توجه به نمودار، $f(b)=۰$ است، پس معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$۲-۲\,Sin\,(x-\frac{۳\pi}{۴})=۰\Rightarrow Sin\,(x-\frac{۳\pi}{۴})=۱\Rightarrow x-\frac{۳\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۴}$$

$x=b$ دومین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $f(x)=۰$ است، بنابراین:

اولین جواب مثبت معادله: $k=۰\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۴}$

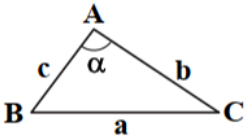
دومین جواب مثبت معادله: $k=۱\Rightarrow x=۲\pi+\frac{۵\pi}{۴}=\frac{۱۳\pi}{۴}\Rightarrow b=\frac{۱۳\pi}{۴}$

بنابراین:

$$ab=۲\times\frac{۱۳\pi}{۴}=\frac{۱۳\pi}{۲}$$

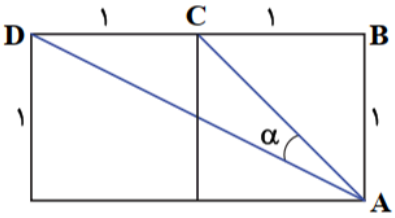
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۶ نکته: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب طول دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.

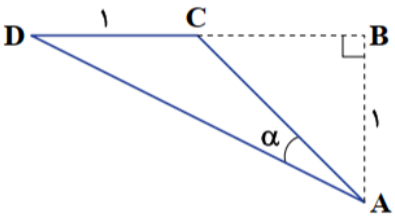


$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}b\cdot c\cdot Sin\,\alpha$$

مساحت مثلث ACD را از دو روش به‌دست می‌آوریم:



روش اول:



$$S_{\triangle ACD}=\frac{۱}{۲}AB\times CD=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱=\frac{۱}{۲}\;(*)$$

روش دوم: با توجه به رابطهٔ فیثاغورس، طول AC و AD را به‌دست می‌آوریم:

$$AD^۲=AB^۲+BD^۲\Rightarrow AD^۲=۵\Rightarrow AD=\sqrt{۵}$$

$$AC^۲=AB^۲+BC^۲\Rightarrow AC^۲=۲\Rightarrow AC=\sqrt{۲}$$

اکنون داریم:

$$S_{\triangle ACD}=\frac{۱}{۲}\times AC\times AD\times Sin\,\alpha\xrightarrow{(*)}\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۵}\times Sin\,\alpha\Rightarrow Sin\,\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۷

نکته : $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

نکته : $\tan^{۲}\alpha+۱=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$

عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\tan x}{\sqrt{۱+\tan^{۲}x}}\cdot(\sin x-\frac{۱}{\sin x})=\frac{\tan x}{\sqrt{\frac{۱}{\cos^{۲}x}}}\times(\frac{\sin^{۲}x-۱}{\sin x})=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{|\cos x|}}\times\frac{-\cos^{۲}x}{\sin x}$$

$$\xrightarrow[\cos x<۰]{\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}} A=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{۱}{-\cos x}}\times\frac{-\cos^{۲}x}{\sin x}=-\sin x\times\frac{-\cos^{۲}x}{\sin x}\Rightarrow A=\cos^{۲}x$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۸

نکته: توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$، مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

نکته : $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha$

ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a+b\sin\frac{a}{۲}x\cos\frac{a}{۲}x\Rightarrow f(x)=a+\frac{b}{۲}\sin ax$$

با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\begin{cases}\max=a+|\frac{b}{۲}|=۰\\ \min=a-|\frac{b}{۲}|=-۶\end{cases}\xrightarrow{+}۲a=-۶\Rightarrow a=-۳\Rightarrow|\frac{b}{۲}|=۳\Rightarrow b=\pm۶$$

تابع f در همسایگی $x=۰$ صعودی است، بنابراین $\frac{ab}{۲}>۰$. از طرفی $a=-۳$، پس $\frac{b}{۲}<۰$ و $b<۰$. در نتیجه $b=-۶$ و ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر است:

$$f(x)=-۳-۳\sin(-۳x)=-۳+۳\sin۳x$$

اکنون خواستهٔ سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$a=-۳,b=-۶\Rightarrow f(\frac{\pi}{a+b})=f(-\frac{\pi}{۹})=-۳+۳\sin(-\frac{\pi}{۳})=-۳-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}=-\frac{۶+۳\sqrt{۳}}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۹

نکته : $\text{Sin}^{۲}\alpha = ۱ - \text{Cos}^{۲}\alpha$

نکته : $\text{Sin}\alpha\,\text{Cos}\alpha = \frac{۱}{۲}\text{Sin}۲\alpha$

نکته : $\text{Cos}۲x = \text{Cos}^{۲}x - \text{Sin}^{۲}x$

نکته : $\text{Cos}۲x = ۲\text{Cos}^{۲}x - ۱$

، به فرض سؤال داریم:

$$\frac{۱}{\text{Sin}^{۲}x} - \frac{۱}{\text{Cos}^{۲}x} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{\text{Cos}^{۲}x - \text{Sin}^{۲}x}{\text{Sin}^{۲}x\,\text{Cos}^{۲}x} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{\text{Cos}۲x}{(\text{Sin}x\,\text{Cos}x)^{۲}} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲\text{Cos}۲x = ۳(\frac{۱}{۲}\text{Sin}۲x)^{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\text{Cos}۲x = \frac{۳}{۴}\text{Sin}^{۲}۲x \Rightarrow ۲\text{Cos}۲x = \frac{۳}{۴}(۱ - \text{Cos}^{۲}۲x) \xrightarrow{\times ۴} ۸\text{Cos}۲x = ۳ - ۳\text{Cos}^{۲}۲x$$

، $\text{Cos}۲x = t$ داریم:

$$۳t^{۲} + ۸t - ۳ = ۰ \xrightarrow{\Delta = ۱۰۰} t = \frac{-۸ \pm ۱۰}{۶} \Rightarrow \begin{cases} t = -۳ \text{ غ.ق.ق} & (-۱ \le \text{Cos}۲x \le ۱) \\ t = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \text{Cos}۲x = \frac{۱}{۳} \end{cases}$$

ندار $\text{Cos}۴x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{Cos}۴x = ۲\text{Cos}^{۲}۲x - ۱ = ۲(\frac{۱}{۳})^{۲} - ۱ = -\frac{۷}{۹}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۰ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\text{Sin}\,x=\text{Sin}\,\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi+\alpha$ و $x=(2k+1)\pi-\alpha$ است که $k\in\mathbb{Z}$.

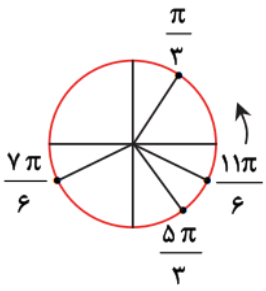
نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\text{Cos}\,x=\text{Cos}\,\alpha$ به‌صورت $x=2k\pi\pm\alpha$ است که $k\in\mathbb{Z}$.

ابتدا معادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$\text{Sin}\,2x+\text{Cos}\,x=\frac{1}{2}+\text{Sin}\,x \Rightarrow 2\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x+\text{Cos}\,x=\frac{1}{2}+\text{Sin}\,x \Rightarrow 2\,\text{Cos}\,x(\text{Sin}\,x+\frac{1}{2})=\text{Sin}\,x+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\text{Sin}\,x+\frac{1}{2})(2\,\text{Cos}\,x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\text{Sin}\,x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \text{Sin}\,x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi-\frac{\pi}{6}, x=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\\ 2\,\text{Cos}\,x=1 \Rightarrow \text{Cos}\,x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$$

در فاصلهٔ $[0,2\pi]$، جواب‌های دو معادلهٔ $\text{Sin}\,x=-\frac{1}{2}$ و $\text{Cos}\,x=\frac{1}{2}$ را روی دایرهٔ مثلثاتی مشخص می‌کنیم:



$$\text{Sin}\,x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}x=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}\\ x=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}\end{cases}$$

$$\text{Cos}\,x=\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\\ x=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

با توجه به دایره، مشخص است که:

$$\left.\begin{array}{l}\text{بیشترین فاصلهٔ بین دو جواب متوالی}=\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}\\ \text{کمترین فاصلهٔ بین دو جواب متوالی}=\frac{11\pi}{6}-\frac{5\pi}{3}=\frac{\pi}{6}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{خواستهٔ سؤال}} \frac{\frac{5\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}=5$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۱

نکته: $\tan(-x) = -\tan x$

نکته: $\tan(\pi - x) = -\tan x \ , \ \tan(\pi + x) = \tan x$

نکته: $\text{Cot}(\pi - x) = -\text{Cot}\, x \ , \ \text{Cot}(\pi + x) = \text{Cot}\, x$

نکته: $\tan(\frac{\pi}{۲} - x) = \text{Cot}\, x \ , \ \tan(\frac{\pi}{۲} + x) = -\text{Cot}\, x$

نکته: $\text{Cot}(\frac{\pi}{۲} - x) = \tan x \ , \ \text{Cot}(\frac{\pi}{۲} + x) = -\tan x$

نکته: اگر $k \in \mathbb{Z}$، آنگاه:

$\text{Cot}(۲k\pi + x) = \text{Cot}\, x \ , \ \text{Cot}(۲k\pi - x) = -\text{Cot}\, x$

$\tan(۲k\pi + x) = \tan x \ , \ \tan(۲k\pi - x) = -\tan x$

با توجه به نکات بالا داریم:

$\tan(x - ۳\pi) = -\tan(۳\pi - x) = -\tan(\pi - x) = \tan x$

$\tan(\frac{۳\pi}{۲} + x) = \tan(\pi + \frac{\pi}{۲} + x) = \tan(\frac{\pi}{۲} + x) = -\text{Cot}\, x$

$\tan(x + \pi) = \tan(\pi + x) = \tan x$

$\text{Cot}(\frac{۱۳\pi}{۲} - x) = \text{Cot}(۶\pi + \frac{\pi}{۲} - x) = \text{Cot}(\frac{\pi}{۲} - x) = \tan x$

بنابراین:

$$A = \frac{(-\text{Cot}\, x) - (\tan x)}{۲(\tan x) + (\tan x)} = \frac{-\text{Cot}\, x - \tan x}{۳\tan x}$$

صورت و مخرج عبارت بالا را در $\tan x$ ضرب می‌کنیم:

$$A = \frac{-۱ - \tan^۲ x}{۳\tan^۲ x}$$

اکنون با توجه به فرض سؤال، $\tan^۲ x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$۱ + \tan^۲ x = \frac{۱}{\text{Cos}^۲ x} \xrightarrow{\text{Cos}\, x = -\frac{۱}{۳}} ۱ + \tan^۲ x = ۹ \Rightarrow \tan^۲ x = ۸$$

بنابراین:

$$A = \frac{-۱ - ۸}{۳(۸)} = -\frac{۹}{۲۴} = -\frac{۳}{۸}$$

بنابراین گزینهٔ ۱ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۲

نکته: نسبت‌های مثلثاتی دو برابر زاویهٔ α به‌صورت زیر هستند:

$\text{Sin}۲\alpha = ۲\text{Sin}\alpha\text{Cos}\alpha \ , \ \text{Cos}۲\alpha = ۲\text{Cos}^۲\alpha - ۱$

نکته: $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \text{Cos}\alpha$

نکته: $\text{Sin}x = \text{Sin}\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \alpha \ , \ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \ , \ k \in \mathbb{Z}$

طرفین تساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲\text{Cos}^۲ x - ۲\text{SinxCos}x = ۱ \Rightarrow ۲\text{SinxCos}x = ۲\text{Cos}^۲ x - ۱ \Rightarrow \text{Sin}۲x = \text{Cos}۲x \xrightarrow{\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \text{Cos}\alpha} \text{Sin}۲x = \text{Sin}(\frac{\pi}{۲} + ۲x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + ۲x \Rightarrow ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} = ۰ \quad \text{غ‌ق‌ق} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} - ۲x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

با قراردادن $k = ۰$، اولین ریشهٔ مثبت $x = \frac{\pi}{۸}$ یا همان $۲۲/۵^\circ$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۳

نکته : $\text{Sin}(۲k\pi+\alpha)=\text{Sin}\,\alpha$

نکته : $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Cos}\,\alpha$

نکته : $\text{Sin}\,۲\alpha=۲\,\text{Sin}\,\alpha\,\text{Cos}\,\alpha$

نکته : $\text{Cos}\,۲\alpha=۲\,\text{Cos}^{۲}\alpha-۱=۱-۲\,\text{Sin}^{۲}\alpha$

ابتدا داریم:

$$\text{Sin}\,(\frac{۱۳\pi}{۲}-۸x)=\text{Sin}\,(۶\pi+\frac{\pi}{۲}-۸x)=\text{Sin}\,(\frac{\pi}{۲}-۸x)=\text{Cos}\,۸x$$

با توجه به فرض مسئله می‌توان نوشت:

$$\text{Sin}\,x+\text{Cos}\,x=\sqrt{\frac{۲}{۳}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}\text{Sin}^{۲}x+۲\,\text{Sin}\,x\,\text{Cos}\,x+\text{Cos}^{۲}x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow ۱+\text{Sin}\,۲x=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \text{Sin}\,۲x=-\frac{۱}{۳}$$

اکنون مقدار $\text{Cos}\,۴x$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{Cos}\,۴x=۱-۲\,\text{Sin}^{۲}۲x\Rightarrow \text{Cos}\,۴x=۱-۲(-\frac{۱}{۳})^{۲}=۱-\frac{۲}{۹}=\frac{۷}{۹}$$

حال مقدار $\text{Cos}\,۸x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{Cos}\,۸x=۲\,\text{Cos}^{۲}۴x-۱\Rightarrow \text{Cos}\,۸x=۲(\frac{۷}{۹})^{۲}-۱=\frac{۹۸}{۸۱}-۱=\frac{۱۷}{۸۱}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۴

نکته: توابع $y=a\,\text{Sin}\,bx+c$ و $y=a\,\text{Cos}\,bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ هستند.

با توجه به اتحاد مثلثاتی $\text{Cos}\,۲x=۲\,\text{Cos}^{۲}x-۱$ می‌توان نوشت:

$$\text{Cos}\,۲x=۲\,\text{Cos}^{۲}x-۱\Rightarrow ۲\,\text{Cos}^{۲}x=۱+\text{Cos}\,۲x\Rightarrow \text{Cos}^{۲}x=\frac{۱+\text{Cos}\,۲x}{۲}$$

اکنون ضابطهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

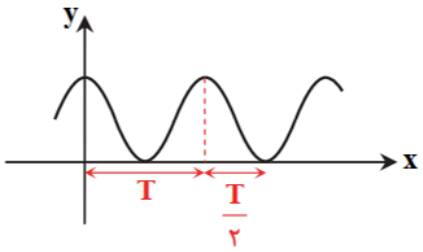
$$f(x)=a\,\text{Sin}^{۲}(bx-\frac{۳\pi}{۲})=a\,\text{Sin}^{۲}(\frac{۳\pi}{۲}-bx)=a\,\text{Cos}^{۲}(bx)$$

با توجه به نمودار تابع f، در یک دورهٔ تناوب $f(x)\geq ۰$ است، از طرفی $\text{Cos}^{۲}(bx)\geq ۰$، پس $a>۰$ است.

$$f(x)=a\,\text{Cos}^{۲}(bx)=a(\frac{۱+\text{Cos}\,۲bx}{۲})=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\text{Cos}\,۲bx$$

$$\max=\frac{a}{۲}+\left|\frac{a}{۲}\right|\xrightarrow{a>۰}۲=\frac{a}{۲}+\frac{a}{۲}\Rightarrow a=۲$$

از طرفی:



$$\Rightarrow \frac{۳T}{۲}=۵\pi\Rightarrow T=\frac{۱۰\pi}{۳}\Rightarrow \frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{۱۰\pi}{۳}\Rightarrow |b|=\frac{۳}{۱۰}$$

بنابراین:

$$a|b|=۲\times\frac{۳}{۱۰}=\frac{۳}{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۵ نکته: توابع $y=a\,Sin(bx)+c$ و $y=a\,Cos(bx)+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$، مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نمودار مشخص است که a مثبت و دورهٔ تناوب تابع برابر ۶، ماکزیمم تابع برابر ۲ و مینیمم تابع برابر ۴- است.

$$T=۶ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|}=۶$$

$$\Rightarrow \frac{۲\pi}{\pi|b|}=۶ \Rightarrow \frac{۲}{|b|}=۶$$

$$\Rightarrow |b|=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l} max=|a|+c=۲ \\ min=-|a|+c=-۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲c=-۲ \Rightarrow c=-۱ \Rightarrow |a|=۳ \xrightarrow{a>۰} a=۳$$

ضابطهٔ تابع f به‌صورت زیر است:

$$f(x)=۳\,Cos(\pm\frac{\pi x}{۳})-۱$$

$$\Rightarrow f(x)=۳\,Cos(\frac{\pi x}{۳})-۱$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$f(-۲۵)=۳\,Cos(-\frac{۲۵\pi}{۳})-۱=۳\,Cos(\frac{۲۵\pi}{۳})-۱$$

$$=۳\,Cos(۸\pi+\frac{\pi}{۳})-۱=۳\,Cos\frac{\pi}{۳}-۱=۳\times\frac{۱}{۲}-۱=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۶

نکته : $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

با استفاده از نکات فوق داریم:

$$1 + \cos 2x - 3\sin x = 0 \Rightarrow 1 + 1 - 2\sin^2 x - 3\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

فرض می‌کنیم $\sin x = t$ ، داریم:

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm 5}{4} \Rightarrow t = -2 \ , \ t = \frac{1}{2}$$

$t = -2 \Rightarrow \sin x = -2$ غ‌ق‌ق

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[0, 4\pi]$ عبارتند از:

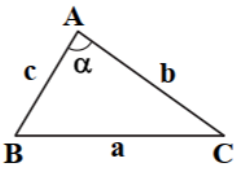
$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, 2\pi + \frac{5\pi}{6}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2\pi + \frac{5\pi}{6} = 4\pi + \frac{12\pi}{6} = 6\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۷ نکته: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویهٔ بین آن‌ها.



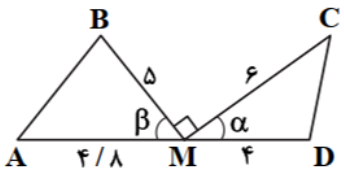
$$S_{\triangle ABC} = \frac{۱}{۲} bc \operatorname{Sin}\alpha$$

نکته : $\operatorname{Sin}(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \operatorname{Cos}\alpha$

نکته : $\operatorname{Sin}۲\alpha = ۲\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha$

نکته : $\operatorname{Cos}۲\alpha = ۱ - ۲\operatorname{Sin}^{۲}\alpha$

ابتدا مساحت هر دو مثلث را به‌دست می‌آوریم:



$$S_{\triangle ABM} = \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۴/۸ \times \operatorname{Sin}\beta = ۱۲\operatorname{Sin}\beta$$

$$S_{\triangle MCD} = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۶ \times \operatorname{Sin}\alpha = ۱۲\operatorname{Sin}\alpha$$

از طرفی داریم:

$$\alpha + \beta + \hat{M} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{M}=۹۰^\circ} \alpha + \beta = ۹۰^\circ \Rightarrow \beta = ۹۰^\circ - \alpha \Rightarrow \operatorname{Sin}\beta = \operatorname{Sin}(۹۰^\circ - \alpha) = \operatorname{Cos}\alpha$$

بنابراین:

$$۱۲\operatorname{Sin}\beta + ۱۲\operatorname{Sin}\alpha = ۱۲\operatorname{Cos}\alpha + ۱۲\operatorname{Sin}\alpha = \sqrt{۱۸} \Rightarrow ۱۲(\operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha) = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

دو طرف رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم و سپس $\operatorname{Sin}۲\alpha$ و $\operatorname{Cos}۴\alpha$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\operatorname{Cos}^{۲}\alpha + \operatorname{Sin}^{۲}\alpha + ۲\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha = \frac{۱}{۸} \Rightarrow ۱ + \operatorname{Sin}۲\alpha = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \operatorname{Sin}۲\alpha = -\frac{۷}{۸}$$

$$\operatorname{Cos}۴\alpha = ۱ - ۲\operatorname{Sin}^{۲}۲\alpha \Rightarrow \operatorname{Cos}۴\alpha = ۱ - ۲(-\frac{۷}{۸})^{۲} = ۱ - \frac{۴۹}{۳۲} \Rightarrow \operatorname{Cos}۴\alpha = -\frac{۱۷}{۳۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۸

نکته : $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

نکته : $\cos ۲\alpha=\cos^۲\alpha-\sin^۲\alpha$

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x=\sin\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi+\alpha$ و $x=(۲k+۱)\pi-\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\cos x=\cos\alpha$ به‌صورت $x=۲k\pi\pm\alpha$ می‌باشند که $k\in\mathbb{Z}$.

ابتدا معادلهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos ۲x}{\cos^۳x-\sin^۳x}=\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^۲x-\sin^۲x}{(\cos x-\sin x)(\cos^۲x+\sin x\cos x+\sin^۲x)}=\sin x \Rightarrow \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x-\sin x)(۱+\sin x\cos x)}=\sin x$$

$$\Rightarrow \cos x+\sin x=\sin x+\sin^۲x\cos x \Rightarrow \cos x=\sin^۲x\cos x$$

روش اول:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z} \\ \sin^۲x=۱ \Rightarrow \begin{cases} \sin x=۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z} \\ \sin x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

پس $x=\frac{\pi}{۲}$ و $x=\frac{۳\pi}{۲}$ جواب‌های معادله در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ هستند و مجموع آن‌ها برابر ۲π است.

تذکر: دقت کنید جواب‌های دو معادله $\cos x=۰$ و $\sin^۲x=۱$ برابر هستند.

روش دوم:

$$\cos x=\sin^۲x\cos x \Rightarrow \cos x-\sin^۲x\cos x=۰ \Rightarrow \cos x\underbrace{(۱-\sin^۲x)}_{\cos^۲x}=۰ \Rightarrow \cos^۳x=۰$$

$$\Rightarrow \cos x=۰ \xrightarrow{x\in(۰,۲\pi)} x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر ۲π است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۹

نکته : $1+\text{Cot}^2\alpha=\frac{1}{\text{Sin}^2\alpha}$

ابتدا با تنها کردن y در یک طرف معادله خط، شیب خط را برحسب k محاسبه می‌کنیم:

$$(2k-2)x+ky-5=0 \Rightarrow -ky=(2k-2)x-5 \Rightarrow y=(\frac{2k-2}{-k})x+\frac{5}{k}$$

بنابراین شیب این خط برابر $\frac{2k-2}{-k}$ است.

از طرف دیگر شیب هر خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، پس با استفاده از $\text{Sin}\theta$، مقدار $\tan\theta$ را محاسبه می‌کنیم:

$$1+\text{Cot}^2\theta=\frac{1}{\text{Sin}^2\theta} \Rightarrow 1+\text{Cot}^2\theta=\frac{1}{(\frac{3\sqrt{13}}{13})^2} \Rightarrow 1+\text{Cot}^2\theta=\frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow \text{Cot}^2\theta=\frac{13}{9}-1=\frac{4}{9} \Rightarrow \frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{4}{9} \Rightarrow \tan^2\theta=\frac{9}{4} \Rightarrow \tan\theta=\pm\frac{3}{2}$$

با توجه به اینکه $90^\circ<\theta<180^\circ$، $\tan\theta$ مقداری منفی است، پس:

$$\frac{2k-2}{-k}=-\frac{3}{2} \Rightarrow 4k-4=3k \Rightarrow k=4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۰

نکته : $\tan x=\frac{\text{Sin}x}{\text{Cos}x}$, $\text{Cot}x=\frac{\text{Cos}x}{\text{Sin}x}$, $\tan x\text{Cot}x=1$

نکته : $\text{Sin}^2x+\text{Cos}^2x=1 \Rightarrow \text{Sin}^2x=1-\text{Cos}^2x$, $\text{Cos}^2x=1-\text{Sin}^2x$

با توجه به نکات بالا داریم:

$$\frac{1+\tan x}{1+\text{Cot}x}(\frac{1}{\text{Cos}x}-\tan x)=\frac{1+\tan x}{1+\frac{1}{\tan x}}(\frac{1}{\text{Cos}x}-\frac{\text{Sin}x}{\text{Cos}x})=\frac{1+\tan x}{\frac{\tan x+1}{\tan x}}(\frac{1-\text{Sin}x}{\text{Cos}x})=\frac{\tan x(1+\tan x)}{1+\tan x}(\frac{1-\text{Sin}x}{\text{Cos}x})$$

$$=\tan x(\frac{1-\text{Sin}x}{\text{Cos}x})=\frac{\text{Sin}x}{\text{Cos}x}\times(\frac{1-\text{Sin}x}{\text{Cos}x})=\frac{\text{Sin}x(1-\text{Sin}x)}{\text{Cos}^2x}=\frac{\text{Sin}x(1-\text{Sin}x)}{1-\text{Sin}^2x}=\frac{\text{Sin}x(1-\text{Sin}x)}{(1+\text{Sin}x)(1-\text{Sin}x)}=\frac{\text{Sin}x}{1+\text{Sin}x}$$

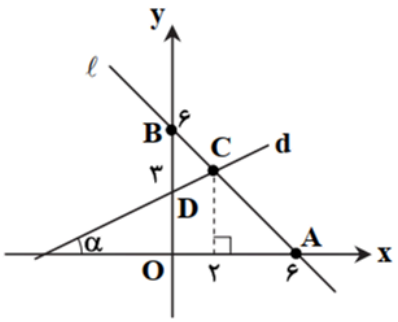
طبق فرض این مقدار برابر $\frac{A}{1+\text{Sin}x}$ است، پس $A=\text{Sin}x$.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۱ نکته: شیب هر خط که محور افقی را قطع کند برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد، آنگاه:

$$\text{شیب خط} = \tan\alpha$$

با توجه به شکل می‌توان معادلهٔ خط ℓ را با توجه به نقاط $A(۶,۰)$ و $B(۰,۶)$ به‌دست آورد:



$$\text{شیب خط}\ \ell = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۰-۶}{۶-۰} = -\frac{۶}{۶} = -۱$$

$$\text{معادلهٔ خط}\ \ell : y = ax + b \Rightarrow y = -x + ۶$$

(دقت کنید که عرض از مبدأ خط ℓ برابر ۶ و در نتیجه مقدار $b = ۶$ است.)

نقطهٔ C محل برخورد خط d و ℓ است، پس داریم:

$$x_C = ۲ \Rightarrow y_C = -۲ + ۶ = ۴$$

خط d از نقاط $C(۲,۴)$ و $D(۰,۳)$ می‌گذرد، پس شیب آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط}\ d = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{۴-۳}{۲-۰} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \text{شیب خط}\ d \Rightarrow \tan\alpha = \frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۲ نکته: $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$, $\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha$

نکته: جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = \cos\alpha$ عبارتند از: $x = ۲k\pi \pm \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$

با استفاده از نکات داریم:

$$\frac{\cos^۲ ۲x - \sin^۲ ۲x}{۲} = \sin x\cos x \Rightarrow \cos^۲ ۲x - \sin^۲ ۲x = ۲\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \cos ۲(۲x) = \sin ۲x \Rightarrow \cos ۴x = \cos(\frac{\pi}{۲} - ۲x) \Rightarrow ۴x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} - ۲x)$$

$$\begin{cases} ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - ۲x \Rightarrow ۶x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \quad (۱) \\ ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} + ۲x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \quad (۲) \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارتند از:

$$(۱) : x = \frac{\pi}{۱۲}, x = \frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۱۲}, x = \frac{۲\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۹\pi}{۱۲}$$

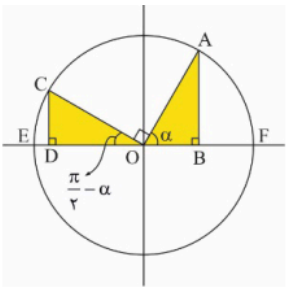
$$(۲) : x = \pi - \frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۴} = \frac{۹\pi}{۱۲}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\frac{\pi}{۱۲} + \frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{۹\pi}{۱۲} = \frac{۱۵\pi}{۱۲} = \frac{۵\pi}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۳ **پله اول:** می‌دانیم که شعاع دایره مثلثاتی برابر ۱ می‌باشد. یعنی $|OE|=|OF|=۱$ در نتیجه داریم:



$$|OD|=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\sin\alpha,|DE|=|OE|-|OD|=۱-\sin\alpha$$

$$|BO|=\cos\alpha,|BF|=|OF|-|BO|=۱-\cos\alpha$$

پله دوم: حاصل عبارت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{|DE|}{|OD|}-\frac{|BF|}{|BO|}=\left(\frac{۱-\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)-\left(\frac{۱-\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)=\left(\frac{۱}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}\right)-\left(\frac{۱}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}\right)=\frac{۱}{\sin\alpha}-\frac{۱}{\cos\alpha}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۴ با توجه به رابطهٔ طول کمان روبه‌روی زاویه مرکزی θ (بر حسب رادیان) داریم: $l=r\theta\Rightarrow a=۲r$

از طرفی می‌دانیم محیط دایره‌ای با شعاع r برابر $۲\pi r$ است؛ بنابراین:

$$a+b=۲\pi r\xrightarrow{a=۲r}b=۲\pi r-۲r\Rightarrow b=۲r(\pi-۱)$$

بنابراین $\frac{a}{b}=\frac{۲r}{۲r(\pi-۱)}=\frac{۱}{\pi-۱}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۵ می‌دانیم $\sin^۲x+\cos^۲x=۱$ است، پس:

$$(b-۲a)^۲+(۲b+a)^۲=۱\Rightarrow(b^۲+۴a^۲-۴ab)+(۴b^۲+a^۲+۴ab)=۱\Rightarrow ۵a^۲+۵b^۲=۱\Rightarrow a^۲+b^۲=\frac{۱}{۵}$$

از طرفی طبق رابطهٔ صورت سؤال $b-a=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ است، پس:

$$(b-a)^۲=\left(\frac{۱}{\sqrt{۵}}\right)^۲\Rightarrow \overbrace{b^۲+a^۲}^{\frac{۱}{۵}}-۲ab=\frac{۱}{۵}\Rightarrow ab=۰$$

بنابراین یکی از مقادیر a یا b برابر صفر است (توجه کنید a و b هر دو نمی‌توانند برابر صفر باشند)، حال از آن جایی که $\tan x=\frac{b-۲a}{۲b+a}$ است، داریم:

حالت ۱ : $a=۰\Rightarrow\tan x=\frac{b}{۲b}=\frac{۱}{۲}$ حالت ۲ : $b=۰\Rightarrow\tan x=\frac{-۲a}{a}=-۲$

از آن‌جایی که انتهای کمان x در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی است، پس $\tan x>۰$ است و در نتیجه $\tan x=\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

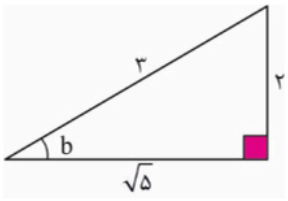
۱۴۶ با توجه به این که $a+b=\frac{\pi}{۲}$ است، پس $۲a+۲b=\pi$ و $۳a+۳b=\frac{۳\pi}{۲}$ است، پس:

$$\frac{\sin(۳a+۳b+b)-\cos(۳a+۳b+a)}{\tan(۲a+۲b+a)+\tan(۲a+۲b+b)}=\frac{\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+b\right)-\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+a\right)}{\tan(\pi+a)+\tan(\pi+b)}=\frac{-\cos b-\sin a}{\tan a+\tan b}$$

حال از آنجایی که $a+b=\frac{\pi}{۲}$ است، پس a و b متمم‌اند و در نتیجه $\sin a=\cos b$ و $\tan a=\cot b$ است:

$$\frac{-\cos b-\cos b}{\cot b+\tan b}=\frac{-۲\cos b}{\cot b+\tan b}$$

حال با توجه به این که $\sin b=\frac{۲}{۳}$ است، پس:



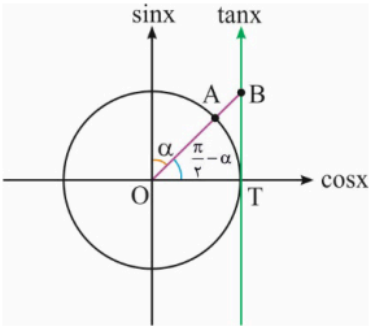
$$\Rightarrow \cos b=\frac{\sqrt{۵}}{۳},\tan b=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\cot b=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین حاصل کسر برابر است با:

$$\frac{-۲\cos b}{\tan b+\cot b}=\frac{-۲\times\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{\sqrt{۵}}+\frac{\sqrt{۵}}{۲}}=\frac{\frac{-۲\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۹}{۲\sqrt{۵}}}=-\frac{۲۰}{۲۷}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۷ با توجه به شکل مقابل:



$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=BT\Rightarrow \cot\alpha=BT$$

از طرفی OA و OT شعاع دایرهٔ مثلثاتی هستند، پس $OA=OT=۱$ است. بنابراین طبق رابطهٔ سلطان فیثاغورس! در مثلث OBT داریم:

$$OB^۲=OT^۲+BT^۲\Rightarrow OB^۲=۱+\cot^۲\alpha\Rightarrow OB=\sqrt{۱+\cot^۲\alpha}=\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}=\frac{۱}{\sin\alpha}\Rightarrow AB=OB-OA=\frac{۱}{\sin\alpha}-۱$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۸ باتوجه به شکل صورت سؤال، مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$s=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۲\sqrt{۵}\times۹\times\sin\theta=۱۵\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

حال مقدار $\cot\left(\frac{۵\pi}{۲}+\theta\right)$ را به دست می‌آوریم:

$$\cot\left(\frac{۵\pi}{۲}+\theta\right)=\cot\left(۲\pi+\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)=-\tan\theta$$

حال برای به دست آوردن $\tan\theta$ خواهیم داشت:

$$\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta=۱-\left(\frac{\sqrt{۵}}{۳}\right)^۲=\frac{۴}{۹}\Rightarrow ۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}=\frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow\tan^۲\theta=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\tan\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow-\tan\theta=-\frac{\sqrt{۵}}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۹ تک‌پله: می‌دانیم مساحت مثلث ABC با داشتن زاویهٔ بین دو ضلع از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{۱}{۲}AC\times BC\times \sin ۳۰^\circ$$

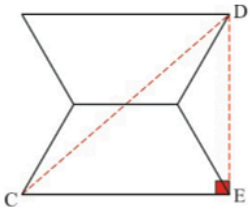
حال داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}\log_{۳}^{۱۶}\times\log_{۲}^{۲۷}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}\log_{۳}^{۲^۴}\times\log_{۲}^{۳^۳}$$

$$=\frac{۴\times۳}{۴}\log_{۳}^{۲}\times\log_{۲}^{۳}=۳\times\frac{\log ۲}{\log ۳}\times\frac{\log ۳}{\log ۲}=۳$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۰ پله اول: طول ضلع شـــش ضلعی برابر $a=۵$ اســـت. در ضمن طول DE برابر قطر کوچک شش ضلعی و طول CE برابر قطر بزرگ شش ضلعی است، پس:



$$DE=a\sqrt{۳}=۵\sqrt{۳},CE=۲a=۲\times۵=۱۰$$

پله دوم: حال با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث CDE داریم:

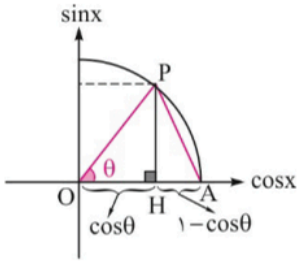
$$CD^۲=CE^۲+DE^۲\Rightarrow CD^۲=(۱۰^۲)+(۵\sqrt{۳})^۲=۱۷۵\Rightarrow CD=۵\sqrt{۷}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۱ سرنخ: اولًا شعاع دایره مثلثاتی برابر یک است. ثانیاً مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی به‌صورت $P(\cos\theta,\sin\theta)$ است.

پله اول: چون OA و OP شعاع دایرهٔ مثلثاتی هستند پس $|OA|=|OP|=۱$ است.

در ضمن $|OH|=\cos\theta$ و $|AH|=۱-\cos\theta$ و $|PH|=\sin\theta$ است: پس در مثلث AHP داریم:



پله دوم:

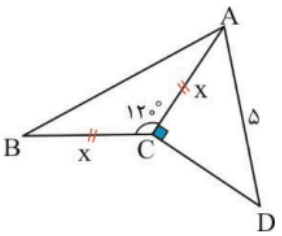
$$|PH|^۲+|AH|^۲=|AP|^۲\Rightarrow \sin^۲\theta+(۱-\cos\theta)^۲=(۲\sqrt{\cos\theta})^۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲\theta+۱+\cos^۲\theta-۲\cos\theta=۴\cos\theta$$

$$\Rightarrow ۲=۶\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۲ پله اول: می‌دانیم $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AC\times BC\times \sin ۱۲۰^\circ$ است و فرض می‌کنیم $AC=BC=x$ است، پس:



$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}\times x\times x\times \sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times x^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$S_{\triangle ABC}=۴\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲=۴\sqrt{۳}\Rightarrow x=۴$$

پله دوم: با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ACD داریم:

$$AD^۲=AC^۲+CD^۲\Rightarrow CD^۲=۵^۲-۴^۲=۹\Rightarrow CD=۳$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD}=\frac{۱}{۲}\times AC\times CD\times \sin ۹۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳\times ۱=۶$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۳ پله اول: می‌دانیم اگر $\alpha+\beta=۹۰^\circ$ باشد، آنگاه $\left.\begin{matrix}\sin\alpha=\cos\beta\\ \tan\alpha=\cot\beta\end{matrix}\right\}$ در نتیجه داریم:

$$\sin(۵۰^\circ+x)=\cos ۳۵^\circ\Rightarrow ۵۰^\circ+x+۳۵^\circ=۹۰^\circ\Rightarrow x=۵^\circ$$

$$\tan^۳(۲۵^\circ+y)=\cot^۳ ۱۰^\circ\Rightarrow \tan(۲۵^\circ+y)=\cot ۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲۵^\circ+y^\circ+۱۰=۹۰^\circ\Rightarrow y=۵۵^\circ$$

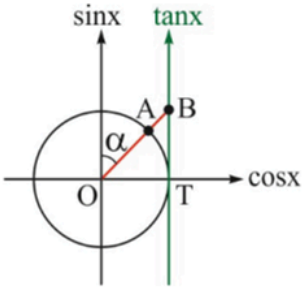
پله دوم:

$$\cos(y-x+۲۰۰^\circ)=\cos(۵۵^\circ-۵^\circ+۲۰۰^\circ)=\cos(۲۵۰^\circ)$$

$$\cos(۲۷۰^\circ-۲۰^\circ)=-\sin ۲۰^\circ$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۴ تک‌پله: با توجه به شکل مقابل:



$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=BT\Rightarrow \cot\alpha=BT$$

از طرفی OA و OT شعاع دایرهٔ مثلثاتی هستند، پس: $OA=OT=۱$ است. بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس در مثلث OBT داریم:

$$OB^۲=OT^۲+BT^۲\Rightarrow OB^۲=۱+\cot^۲\alpha\Rightarrow OB=\sqrt{۱+\cot^۲\alpha}$$

$$\rightarrow OB=\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲\alpha}}=\frac{۱}{\sin\alpha}\Rightarrow AB=OB-OA=\frac{۱}{\sin\alpha}-۱$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۵ پله اول:

$$\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}+x\right)=\sin x$$

$$\sin(x-۵\pi)=-\sin(۵\pi-x)=-\sin x$$

$$\sin(۱۰\pi+x)=\sin x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)=\sin x$$

پله دوم: حال $f(x)$ را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

$$f(x)=\cancel{\sin x}-\cancel{\sin x}+۷\sin x+۶\sin x\Rightarrow f(x)=۱۳\sin x$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۱}=۲\pi$$

بیشترین مقدار تابع : $\max=۱۳\rightarrow T\times\max=۲\pi\times۱۳=۲۶\pi$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۶ پله اول:

$$f(x)=a\cos\left(bx-\frac{\pi}{۳}\right)+d\Rightarrow f(x)=a\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{۳}-bx\right)}_{\alpha}+d$$

اگر $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos\alpha=\sin\beta$

$$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{۳}-bx\right)=\sin\overbrace{\left(bx+\frac{\pi}{۶}\right)}^{\beta}$$

پله دوم: طبق نمودار داده شـــده، sin نرمال اســـت یعنی به‌ازای $\sin\left(bx+\frac{\pi}{۶}\right)=۱$ ، مقدار max و به ازای $\sin\left(bx+\frac{\pi}{۶}\right)=-۱$ مقدار min به دست می‌آید و همچنین $ab>۰$

$$\left.\begin{array}{l}\max=۱\Rightarrow a+d=۱\\ \min=-۳\Rightarrow -a+d=-۳\end{array}\right\}\Rightarrow d=-۱,a=۲$$

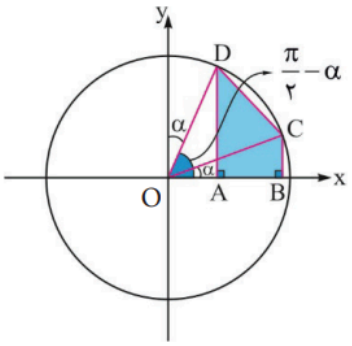
$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۲\frac{\pi}{۳}\Rightarrow|b|=۳\Rightarrow b=۳$$

$$f(x)=۲\sin\left(۳x+\frac{\pi}{۶}\right)-۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۹}\right)=۲\sin\left(\frac{۳\pi}{۹}+\frac{\pi}{۶}\right)-۱\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{۹}\right)=۲\sin\left(\frac{\pi}{۲}\right)-۱=۲-۱=۱$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۷ **سرنخ** با توجه به این نکته که مختصات هر نقطه روی دایره مثلثاتی به صورت $P(\cos\theta,\sin\theta)$ است، از روابط مثلثاتی در قائم‌الزاویه کمک بگیر.



پلهٔ اول: با توجه به دایره مثلثاتی در مثلث OBC داریم: $BC=\sin\alpha, OB=\cos\alpha$

پلهٔ دوم: در مثلث OAD نیز داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{AD}{OD}\xrightarrow{OD=1}AD=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Rightarrow AD=\cos\alpha$$

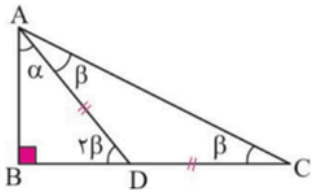
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{OA}{OD}\xrightarrow{OD=1}OA=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Rightarrow OA=\sin\alpha$$

در نتیجه: $AB=OB-OA=\cos\alpha-\sin\alpha$ است و داریم:

$$S_{ABCD}=\frac{(AD+BC)\times(AB)}{2}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{2}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2}=\frac{1}{2}\cos 2\alpha$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۸ پلهٔ اول: چون $AD=CD$ است، پس $A\hat{C}D=C\hat{A}D=\beta$ است. از طرفی $A\hat{D}B$ زاویهٔ خارجی مثلث ADC است، پس $A\hat{D}B=\beta+\beta=2\beta$ است. حال با توجه به مثلث ADB درمی‌یابیم که $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$ است، پس:



$$\alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta\Rightarrow\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=\cot 2\beta$$

در ضمن می دانیم $\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ است، پس:

$$\cot 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow\tan 2\beta=\frac{1}{\cot 2\beta}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

پلهٔ دوم: می دانیم $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-\cos\beta$ است و داریم:

$$\frac{1}{\cos^2 2\beta}=1+\tan^2 2\beta=1+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{9}{4}\Rightarrow\cos^2 2\beta=\frac{4}{9}\xrightarrow{0<2\beta<\frac{\pi}{2}}\cos 2\beta=\frac{2}{3}$$

$$\cos^2\beta=\frac{1+\cos 2\beta}{2}=\frac{1+\frac{2}{3}}{2}=\frac{5}{6}\xrightarrow{0<\beta<\frac{\pi}{2}}\cos\beta=\sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\Rightarrow\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)=-\cos\beta=-\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=-\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{-\sqrt{30}}{6}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۹ **سرنخ** پس از ساده سازی، با استفاده از دوره تناوب و max و min تابع، ضرایب را پیدا کنید.

پله اول: ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a+b\sin(cx)\cos(cx)\cos(۲cx)=a+b\frac{۱}{۲}\sin(۲cx)\cos(۲cx)$$

$$=a+\frac{b}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۴cx=a+\frac{b}{۴}\sin ۴cx$$

پله اول: حال با توجه به‌صورت سوال داریم:

$$a=\frac{۰+۴}{۲}=۲$$

۱- ماکسیمم برابر ۴ و مینیمم برابر صفر است، پس:

$$\left|\frac{b}{۴}\right|=\frac{۴-۰}{۲}=۲\rightarrow|b|=۸$$

۲- دورهٔ تناوب تابع برابر $T=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۰}=\frac{۲\pi}{۵}$ است. پس:

$$T=\frac{۲\pi}{|۴c|}\Rightarrow\frac{۲\pi}{۵}=\frac{۲\pi}{|۴c|}\Rightarrow|۴c|=۵\Rightarrow|c|=\frac{۵}{۴}$$

پله سوم: با توجه به دوره تناوب، نمودار در $x=۰$ صعودی خواهد بود، پس $bc>۰$ است.

$$\frac{bc}{a}=\frac{۸\times\frac{۵}{۴}}{۲}=۵$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۰ در ابتدا می‌نویسیم:

$$\tan x.\cot x=۱\Rightarrow\frac{(\sqrt{k}+۲)}{۲}(\sqrt{k}-۲)=۱\Rightarrow\frac{k-۴}{۲}=۱\Rightarrow k=۶$$

یعنی $\tan x=\sqrt{۶}-۲$ است. حالا داریم:

$$\frac{\cos x}{۲+۲\sin x}+\frac{۱+\sin x}{۲\cos x}=\frac{\sin^۲x+\cos^۲x+۱+۲\sin x}{۲(۱+\sin x)\cos x}=\frac{۲(۱+\sin x)}{۲(۱+\sin x)\cos x}=\frac{۱}{\cos x}$$

و در نهایت با توجه به $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ داریم:

$$\frac{۱}{\cos x}=\pm\sqrt{۱+(\sqrt{۶}-۲)^۲}=\pm\sqrt{۱۱-\sqrt{۹۶}}$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۱

$$\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow\sin ۲x=\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\sin^۶x+\cos^۶x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲۲x=۱-\frac{۳}{۴}(\frac{۴}{۱۰})=۰/۷$$

$$(\sin x+\cos x)^۲=۱+\sin ۲x=۱+\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\Rightarrow\sin x+\cos x=\pm\sqrt{\underbrace{۱+\frac{۲}{\sqrt{۱۰}}}_{\text{حدود }۱/۶}}$$

پس جواب $[\sin x+\cos x]$ می‌شود ۱ یا ۲- و اختلاف اینها ۰/۳ یا ۲/۷ است.

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۲

$$\cos ۲x = \frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} = \frac{۱-۴}{۱+۵} = \frac{-۳}{۵}$$

$$|\sin ۴x| = |۲\sin ۲x \cos ۲x| = ۲ \times \frac{۴}{۵} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۲۴}{۲۵}$$

$$۲ = \tan x = \frac{۲\tan \frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲ \frac{x}{۲}} \Rightarrow ۱-t^۲ = t \Rightarrow t^۲ + t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = \frac{-۱ \pm \sqrt{۵}}{۲} = \begin{cases} +۰/۶ \\ -۱/۶ \end{cases}$$

پس جواب می‌شود:

$$-\frac{۳}{۵} + \frac{۲۴}{۲۵} - (-۱/۶) = -۰/۶ + ۰/۹۶ + ۱/۶ = ۱/۹۶$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۳ به اینکه ارتفاع برای دو مثلث سمت چپ و راست برابر است (دو قاعده ذوزنقه با هم موازی هستند)، برای نسبت مساحت مثلث‌ها داریم:

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{\frac{۱}{۲} \times h \times ۲m}{\frac{۱}{۲} \times h \times m} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۳k \times ۴k \times \sin ۲a}{\frac{۱}{۲} \times k \times ۲k \times \sin a} \Rightarrow ۲ = \frac{۱۲k^۲ \times ۲\sin a \cos a}{۲k^۲ \times \sin a} \Rightarrow \cos a = \frac{۱}{۶}$$

(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴ در مثلث DEF داریم:

$$\frac{DF}{DE} = \cos ۴۴^\circ \rightarrow \frac{DF}{۱} = \cos ۴۴^\circ$$

$$\frac{EF}{DE} = \sin ۴۴^\circ \rightarrow \frac{EF}{۱} = \sin ۴۴^\circ$$

در مثلث DFC نیز داریم:

$$\frac{DC}{DF} = \cos ۱۴^\circ \rightarrow \frac{DC}{\cos ۴۴^\circ} = \cos ۱۴^\circ \rightarrow DC = \cos ۴۴^\circ \cos ۱۴^\circ$$

زاویهٔ AFB نیز ۱۴ درجه است. در مثلث ABF داریم:

$$\frac{AB}{AF} = \sin ۱۴^\circ \rightarrow \frac{\cos ۴۴^\circ . \cos ۱۴^\circ}{AF} = \sin ۱۴^\circ \rightarrow AF = \cot ۱۴^\circ \cos ۴۴^\circ$$

طول پاره‌خط AE برابر است با:

$$AE = AF - EF = \cot ۱۴^\circ \cos ۴۴^\circ - \sin ۴۴^\circ$$

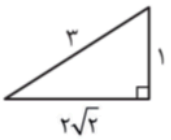
(ماروں ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۵

$$\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}}-\cot x=3\rightarrow\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|-\cot x=3$$

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم}}\begin{cases}1-\cos x>0\\ \sin x<0\end{cases}\rightarrow\frac{1-\cos x}{-\sin x}+\frac{\cos x}{-\sin x}=3\rightarrow\sin x=-\frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم}}\cos x=+\frac{2\sqrt{2}}{3}\rightarrow\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$



$$\tan\frac{x}{2}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{-1}{3+2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}-3$$

(ماروک ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۶ با توجه به اینکه $5\cos^3 x\leq 5$ و $7\cos x\leq 7$ پس همیشه داریم $5\cos^3 x+7\cos x\leq 12$ و درنتیجه باید $\cos x=1$ باشد که جواب‌های آن ۰، 2π، 4π و 6π است.

(ماروک ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۷

$$\cos 6x=1-2\sin^2 3x\qquad\sin 3x=t$$

$$3(1-2t^2)+10t=7\rightarrow 6t^2-10t+4=0\rightarrow t=1,\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases}\sin 3x=1\\ \sin 3x=\frac{2}{3}\end{cases}\xrightarrow{0\leq x\leq 2\pi\Rightarrow 0\leq 3x\leq 6\pi}\begin{cases}3x=\frac{\pi}{2}\text{ و }2\pi+\frac{\pi}{2}\text{ و }4\pi+\frac{\pi}{2}\\ 3x=\begin{cases}\alpha\text{ و }2\pi+\alpha\text{ و }4\pi+\alpha\\ \pi-\alpha\text{ و }2\pi+\pi-\alpha\text{ و }4\pi+\pi-\alpha\end{cases}\end{cases}$$

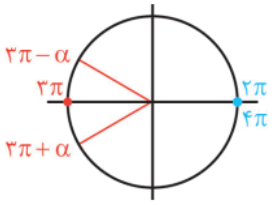
$$\rightarrow\sum 3x_i=\frac{45\pi}{2}\Rightarrow\sum x_i=\frac{15\pi}{2}$$

(ماروک ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۸ مخرج کسر در $x=a$ برابر صفر است و داریم:

$$4(2\cos^2 a-1)-4\cos a+1-\cos^2 a=0$$

$$\rightarrow 7\cos^2 a-4\cos a-3=0\xrightarrow{\text{صفر=جمع ضرایب}}\cos a\begin{cases}1\rightarrow 0,2\pi,4\pi\text{ غ ق ق}\\ -\frac{3}{7}\end{cases}$$



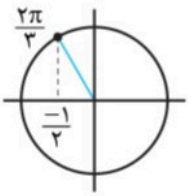
که با توجه به دایره داریم:

$$(3\pi-\alpha)+(3\pi+\alpha)=6\pi$$

(ماروک ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۹

$$f(x)=\frac{[۲\sin x]+\sin x}{(\cos x-۱)(۲\cos x+۱)}$$



$$x\to ۰^{-}:\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-۱+\sin x}{(\cos x-۱)(۲\cos x+۱)}=\frac{-۱}{(۰^{-})(۳)}=+\infty$$

$$x\to \frac{۲\pi}{۳}^{+}:\Rightarrow \cos x<-\frac{۱}{۲}\to ۲\cos x+۱<۰\to \lim_{x\to \frac{۲\pi}{۳}^{+}}=\frac{[\sqrt{۳}]+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{(-\frac{۳}{۲})(۰^{-})}=+\infty$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۰ **سرنخ** با استفاده از تعریف نسبت‌های مثلثاتی در قائم‌الزاویه، دو قاعده و ارتفاع ذوزنقه را یافته و مساحت را به دست آورید .

پله اول: ابتدا در مثلث OBC داریم:

$$BC=\sin ۱۵^{\circ}\ \text{و}\ OB=\cos ۱۵^{\circ}$$

پله دوم: حالا به مثلث OAD توجه کنید:

$$AD=\sin\left(\frac{\pi}{۲}-۱۵^{\circ}\right)=\cos ۱۵^{\circ}\quad \text{و}\quad OA=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-۱۵^{\circ}\right)=\sin ۱۵^{\circ}$$

پله سوم: پس مساحت ذوزنقه رنگی برابر است با:

$$S=\frac{(AD+BC)\times AB}{۲}$$

$$=\frac{(\cos ۱۵^{\circ}+\sin ۱۵^{\circ})\times(\cos ۱۵^{\circ}-\sin ۱۵^{\circ})}{۲}=\frac{\cos^{۲} ۱۵^{\circ}-\sin^{۲} ۱۵^{\circ}}{۲}$$

$$=\frac{\cos ۳۰^{\circ}}{۲}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۱ پله اول: می‌دانیم $\cos^۲\theta = ۱ - \sin^۲\theta$ است. با تجزیه و ساده کردن عبارت‌ها داریم:

$$\sin\theta(۱-\sin\theta) = \frac{\cos^۲\theta}{۴} = \frac{۱-\sin^۲\theta}{۴}$$

$$۴\sin\theta(۱-\sin\theta) = (۱-\sin\theta)(۱+\sin\theta)$$

$$(۱-\sin\theta)(۳\sin\theta-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} \sin\theta = ۱ & \times \quad ۰<\theta<\frac{\pi}{۲} \\ \sin\theta = \frac{۱}{۳} & \checkmark \rightarrow \cos\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \end{cases}$$

پله دوم:

$$\frac{۹\sin(\frac{۳\pi}{۲}-۲\theta)+۳\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{۷\tan(۲\theta-\pi)} = \frac{-۹\cos۲\theta - ۳\sin\theta}{۷\tan۲\theta}$$

$$\cos۲\theta = ۱-۲\sin^۲\theta = ۱-۲(\frac{۱}{۳})^۲ = \frac{۷}{۹}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۴} \rightarrow \tan۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta} = \frac{۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۴}}{۱-\frac{۲}{۱۶}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱۴}{۱۶}} = \frac{۴\sqrt{۲}}{۷}$$

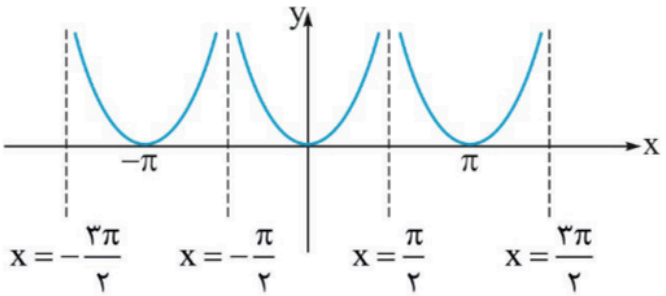
$$\frac{-۹\cos۲\theta - ۳\sin\theta}{۷\tan۲\theta} = \frac{-۹(\frac{۷}{۹}) - ۳(\frac{۱}{۳})}{۷(\frac{۴\sqrt{۲}}{۷})} = \frac{-۷-۱}{۴\sqrt{۲}} = \frac{-۸}{۴\sqrt{۲}} = -\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۲ **سرنخ** با استفاده از روابط $۱+\cos۲\theta = ۲\cos^۲\theta$ و $۱-\cos۲\theta = ۲\sin^۲\theta$، عبارت‌ها را ساده کنید.

تک پله: با توجه به رابطهٔ طلایی می‌دانیم $۱-\cos۲x = ۲\sin^۲x$ و $۱+\cos۲x = ۲\cos^۲x$ است، پس :

$$f(x) = \sqrt{\frac{۱-\cos۲x}{۱+\cos۲x}} = \sqrt{\frac{۲\sin^۲x}{۲\cos^۲x}} = \sqrt{\tan^۲x} = |\tan x| \rightarrow T = \pi$$



دو رابطهٔ طلایی:

$$\cos۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱ \rightarrow ۱+\cos۲\theta = ۲\cos^۲\theta$$

$$\cos۲\theta = ۱-۲\sin^۲\theta \rightarrow ۱-\cos۲\theta = ۲\sin^۲\theta$$

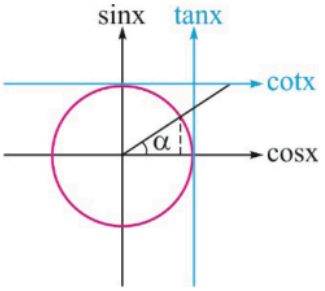
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۳ **سرنخ** با تعیین ریشه‌های صورت و مخرج کسر و تشخیص بزرگ و کوچک بودن ریشه‌ها عبارت‌ها را تعیین علامت کنید.

پله اول: در صورت کسر به جای عدد ۱ می‌نویسم $\tan\alpha.\cot\alpha$ و داریم:

$$P(x)=\frac{x^{۲}-(\tan\alpha+\cot\alpha)x+\tan\alpha\cot\alpha}{\sin^{۲}\alpha-x^{۲}}$$

$$\Rightarrow \frac{(x-\tan\alpha)(x-\cot\alpha)}{(\sin\alpha-x)(\sin\alpha+x)}>۰\Rightarrow$$



پله دوم:

x	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
p(x)	− ت ن	+ ت ن	− ۰	+ ۰ −

بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت بازهٔ $(-\sin\alpha,\sin\alpha)\cup(\tan\alpha,\cot\alpha)$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۴ **پلهٔ اول:**

$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\xrightarrow{\text{ربع اول}}\cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۵}}=\cos\beta\rightarrow\alpha=\beta$$

پس داریم:

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{۲}\right)=\tan\left(\frac{\beta+\beta}{۲}\right)=\tan\beta$$

پلهٔ دوم:

حال با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\frac{۱}{\cos^{۲}x}=۱+\tan^{۲}x$ داریم:

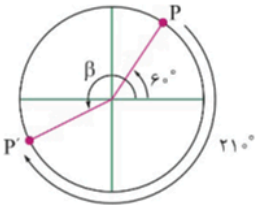
$$\frac{۱}{\cos^{۲}\beta}=۱+\tan^{۲}\beta\Rightarrow\frac{۱}{\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)^{۲}}=۱+\tan^{۲}\beta\Rightarrow\frac{۵}{۴}=۱+\tan^{۲}\beta$$

$$\Rightarrow\tan^{۲}\beta=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{۰\le\beta<\frac{\pi}{۲}}\tan\beta=\frac{۱}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۵ مختصات نقطهٔ P به‌صورت $x_P=\cos\alpha$ است پس $\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$ است و $\alpha=۶۰^\circ$

مختصات نقطهٔ P':



$$x_{P'}=\cos\beta=\cos(۱۸۰+۳۰)=-\cos۳۰=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$y_{P'}=\sin\beta=\sin(۱۸۰+۳۰)=-\sin۳۰=-\frac{۱}{۲}$$

$$\rightarrow P'\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},-\frac{۱}{۲}\right)$$

برای محاسبهٔ y_P:

$$x_P^۲+y_P^۲=۱\Rightarrow\frac{۱}{۴}+y_P^۲=۱\xrightarrow{\text{ناحیه اول}}y_P=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

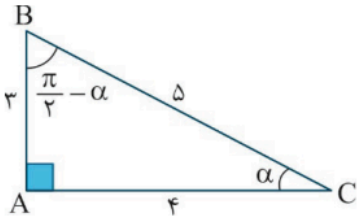
$$P\left(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$

$$PP'=\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲+\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۱}{۲}\right)^۲}=\left(\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}\right)$$

$$\text{محیط مثلث } OPP'=\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲}+۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۶



$$\hat{B}-\hat{C}=\frac{\pi}{۲}-\alpha-\alpha=\frac{\pi}{۲}-۲\alpha$$

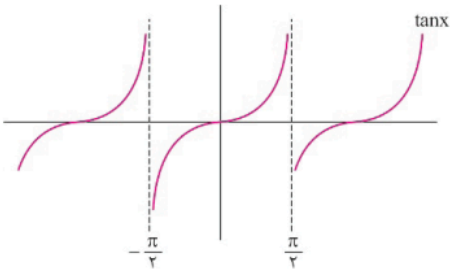
$$\sin(\hat{B}-\hat{C})=\sin\left(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha\right)=\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱$$

$$\cos\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin(\hat{B}-\hat{C})=۲\left(\frac{۴}{۵}\right)^۲-۱=\frac{۷}{۲۵}=۰/۲۸$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۷ با توجه به نمودار، تابع در بازه‌هایی به‌صورت $\left((۲k-۱)\frac{\pi}{۲},(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\right)$ که در آن k عددی صحیح است، اکیداً صعودی است.



$$f(x)=۱+\tan\underbrace{\left(۳x-\frac{\pi}{۳}\right)}_{\alpha}$$

$$(۲k-۱)\frac{\pi}{۲}<\alpha<(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$$

$$(۲k-۱)\frac{\pi}{۲}<۳x-\frac{\pi}{۳}<(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}\Rightarrow(۲k-۱)\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۹}<x<(۲k+۱)\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۹}$$

$$\xrightarrow{k=۰}\frac{-\pi}{۱۸}<x<\frac{۵\pi}{۱۸}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۸ ابتدا تابع f را ساده می‌کنیم، می‌دانیم $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$ است، بنابراین:

$$f(x)=\frac{\cos ۲x\cos ۴x}{\tan x+\cot x}=\frac{\cos ۲x\cos ۴x}{\frac{۲}{\sin ۲x}}$$

$$f(x)=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x\cos ۴x=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\sin ۴x\cos ۴x$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}\sin ۸x=\frac{۱}{۸}\sin ۸x\rightarrow T=\frac{۲\pi}{۸}=\frac{\pi}{۴}$$

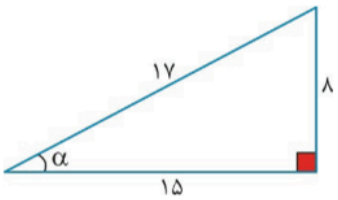
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۹ با توجه به رابطهٔ $\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$ داریم:

$$\tan\alpha = \frac{۲\tan\left(\frac{\alpha}{۲}\right)}{۱-\tan^۲\left(\frac{\alpha}{۲}\right)} = \frac{۲\left(-\frac{۱}{۴}\right)}{۱-\left(-\frac{۱}{۴}\right)^۲} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۱۶}} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱۵}{۱۶}} = -\frac{۸}{۱۵}$$

از طرفی چون $\tan\left(\frac{\alpha}{۲}\right)<۰$ است و $\tan\left(\frac{\alpha}{۲}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$ است، پس $\sin\alpha = ۲\sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{۲}\right)$ نتیجه می‌گیریم $\sin\alpha<۰$ است.

در ضمن چون $\tan\alpha<۰$ و $\sin\alpha<۰$ است، پس $\cos\alpha>۰$ است. با توجه به این که $\tan\alpha=-\frac{۸}{۱۵}$ است، داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{۸}{۱۷} \\ \cos\alpha = \frac{۱۵}{۱۷} \end{cases}$$

پس حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{\tan\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{-\frac{۸}{۱۵}-\frac{۸}{۱۷}}{-\frac{۸}{۱۷}-\frac{۱۵}{۱۷}} = \frac{\frac{-۸\times۱۷-۸\times۱۵}{۱۷\times۱۵}}{-\frac{۲۳}{۱۷}} = \frac{۲۵۶}{۳۴۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۰

$$f(x) = ۱+a-۲\sin^۲ bx = a+\cos ۲bx$$

$$-۱\le \cos ۲bx \le ۱ \rightarrow a-۱\le a+\cos ۲bx \le a+۱$$

با توجه به نمودار کمترین مقدار تابع برابر صفر است، پس:

$$a-۱=۰ \rightarrow a=۱$$

$$T=\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|۲b|} \rightarrow |b|=\frac{۳}{۲} \rightarrow b=\pm\frac{۳}{۲}$$

$$f(x)=۱+\cos ۳x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱+\cos\frac{۳\pi}{۲}=۱$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=a\sin\pi\left(\frac{۱}{۲}+bx\right)=a\sin\left(\frac{\pi}{۲}+b\pi x\right)=a\cos b\pi x$$

مقدار تابع در $x=۰$ برابر ۲ است؛ پس نقطهٔ $(۰,۲)$ در ضابطهٔ تابع صدق می‌کند:

$$۲=a\cos ۰ \Rightarrow a=۲$$

از طرفی $T+\frac{۳}{۴}T=\frac{۷}{۲}$ است؛ پس:

$$\frac{۷}{۴}T=\frac{۷}{۲} \rightarrow T=۲ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|}=۲ \Rightarrow \frac{۲}{|b|}=۲ \Rightarrow |b|=۱ \Rightarrow b^۲=۱$$

بنابراین $a\times b^۲=۲$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۲ به جای $\sin^۲ x$ معادل آن یعنی $۱-\cos^۲ x$ را قرار می دهیم تا به یک معادلهٔ درجه دوم بر حسب $\cos x$ برسیم:

$$۲\sin^۲ x+۳\cos x=۰ \Rightarrow ۲(۱-\cos^۲ x)+۳\cos x=۰$$

$$\Rightarrow -۲\cos^۲ x+۳\cos x+۲=۰ \Rightarrow \cos x=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲(-۲)}=\frac{-۳\pm۵}{-۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=۲ & \times\\ \cos x=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\ldots,-\frac{۲\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳},\ldots\end{cases}$$

پس اختلاف بین کوچک‌ترین جواب مثبت و بزرگ‌ترین جواب منفی برابر $\frac{۲\pi}{۳}-\left(-\frac{۲\pi}{۳}\right)=\frac{۴\pi}{۳}$ است.

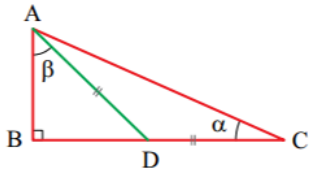
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۳ پاسخ تشریحی

گام اول: از $\tan\beta=\frac{۴}{۳}$ نتیجه می‌شود:

$$\tan\beta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{BD}{AB}=\frac{۴}{۳}$$

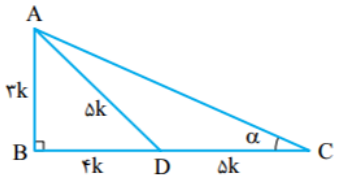
پس طبق مثلث قائم‌الزاویه ۵، ۴، ۳ داریم:



$$AB=۳k \ , \ BD=۴k \ , \ AD=۵k$$

گام دوم: مثلث ADC متساوی‌الساقین است؛ پس $AD=DC=۵k$.

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با اضلاع قائم $۳k$ و $۹k$ داریم:



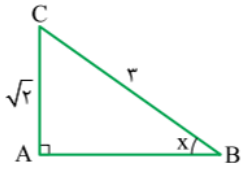
$$AC^۲=(۳k)^۲+(۹k)^۲=۹۰k^۲ \Rightarrow AC=\sqrt{۹۰}k=۳\sqrt{۱۰}k$$

گام چهارم: طبق تعریف سینوس داریم:

$$\sin\alpha=\frac{AB}{AC}=\frac{۳k}{۳\sqrt{۱۰}k}=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** از روی $\sin x$ به کمک مثلث قائم‌الزاویه یا فرمول $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$، مقدار کسینوس را حساب می‌کنیم:



$$AB^۲=۳^۲-(\sqrt{۲})^۲=۹-۲=۷ \Rightarrow AB=\sqrt{۷} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

گام دوم: راه اول

گام دوم: راه دوم

$$\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} (\frac{\sqrt{۲}}{۳})^۲+\cos^۲ x=۱ \xrightarrow{\text{مرتب}} \cos^۲ x=۱-\frac{۲}{۹}=\frac{۷}{۹} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

دقت کنید که $\cos x$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد، اما با توجه به خواستهٔ سؤال $(\cos^۴ x)$ منفی‌بودن کسینوس هم فرقی ایجاد نمی‌کند:

گام سوم: حالا مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ را قرار می‌دهیم و $\sin^۴ x+\cos^۴ x$ را به دست می‌آوریم:

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=(\frac{\sqrt{۲}}{۳})^۴+(\pm\frac{\sqrt{۷}}{۳})^۴=((\frac{\sqrt{۲}}{۳})^۲)^۲+((\pm\frac{\sqrt{۷}}{۳})^۲)^۲=(\frac{۲}{۹})^۲+(\frac{۷}{۹})^۲=\frac{۴+۴۹}{۸۱}=\frac{۵۳}{۸۱}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۵ **پاسخ تشریحی** راه اول:

گام اول: می‌دانیم $۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}$ و $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$. از سال نهم هم به یاد داریم که $\sqrt{a^۲}=|a|$. حالا عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$-۱+\frac{\cot x}{\sqrt{۱+\cot^۲ x}}(\cos x-\frac{۱}{\cos x})=-۱+\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\sqrt{\frac{۱}{\sin^۲ x}}}(\cos x-\frac{۱}{\cos x})=-۱+\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{۱}{|\sin x|}}(\cos x-\frac{۱}{\cos x})$$

گام دوم: چون در صورت سؤال گفته x در ربع سوم قرار دارد، پس $\sin x<۰$ و با علامت منفی از قدرمطلق درمی‌آید:

$$=-۱+\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{۱}{(-\sin x)}}(\cos x-\frac{۱}{\cos x})$$

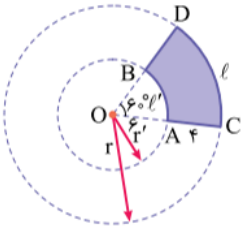
گام سوم: حالا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{sin x‌ها را بزنیم.}} =-۱-\cos x(\cos x-\frac{۱}{\cos x})=-۱-\cos^۲ x+۱=-\cos^۲ x$$

راه دوم: اگر نسبت‌های مثلثاتی یک کمان در ربع سوم مثلاً $x=۲۱۰^\circ$ را بلد باشیم، می‌توانیم گزینه‌ها را کنترل کنیم.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۶ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** طول هر یک از کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ را حساب می‌کنیم. زاویهٔ ۶۰° برابر با $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است.



$$\ell = r\theta = (۴+۶)\times\frac{\pi}{۳} = \frac{۱۰\pi}{۳}$$

$$\ell' = r'\theta = ۶\times\frac{\pi}{۳} = ۲\pi$$

گام دوم: محیط ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$\ell + \ell' + AC + BD = \frac{۱۰\pi}{۳} + ۲\pi + ۴ + ۴ = \frac{۱۶\pi}{۳} + ۸ \simeq ۲۴/۷$$

پس به عدد ۲۵ نزدیک‌تر است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۷ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا توجه کنید که:

$$\sin ۱۰۰^\circ = \underbrace{\sin}_{\text{ربع دوم: }\sin>۰}(۹۰^\circ + ۱۰^\circ) = \underbrace{+\cos}_{\text{تغییر نسبت}} ۱۰^\circ$$

$$\sin ۱۰۵^\circ = \underbrace{\sin}_{\text{ربع دوم: }\sin>۰}(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = \underbrace{+\cos}_{\text{تغییر نسبت}} ۱۵^\circ \qquad \cos ۱۱۰^\circ = \underbrace{\cos}_{\text{ربع دوم: }\cos<۰}(۹۰^\circ + ۲۰^\circ) = \underbrace{-\sin}_{\text{تغییر نسبت}} ۲۰^\circ$$

گام دوم: عبارت را ساده می‌کنیم و در ادامه از اتحاد مثلثاتی $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ استفاده می‌کنیم.

$$\sin^۲ ۱۰^\circ + \sin^۲ ۱۵^\circ + \cos^۲ ۲۰^\circ + \underbrace{\sin^۲ ۱۰۰^\circ}_{\cos^۲ ۱۰^\circ} + \underbrace{\sin^۲ ۱۰۵^\circ}_{\cos^۲ ۱۵^\circ} + \underbrace{\cos^۲ ۱۱۰^\circ}_{\sin^۲ ۲۰^\circ}$$

$$= \underbrace{\sin^۲ ۱۰^\circ + \cos^۲ ۱۰^\circ}_{۱} + \underbrace{\sin^۲ ۱۵^\circ + \cos^۲ ۱۵^\circ}_{۱} + \underbrace{\sin^۲ ۲۰^\circ + \cos^۲ ۲۰^\circ}_{۱} = ۳$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$\cot\left(\frac{۳\pi - ۲\alpha}{۲}\right) = \underbrace{\cot}_{\text{ربع سوم: }\cot>۰}\left(\frac{۳\pi}{۲} - \alpha\right) = \underbrace{+\tan}_{\text{تغییر نسبت}}\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right) = \underbrace{+\cos}_{\text{تغییر نسبت}}\alpha \qquad \cos(\pi - \alpha) = \underbrace{-\cos}_{\text{ربع دوم: }\cos<۰}\alpha$$

گام دوم: طبق صورت سؤال $\cot\left(\frac{۳\pi - ۲\alpha}{۲}\right) = \tan\alpha = ۲$ است و خواستهٔ سؤال $\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \alpha\right).\cos(\pi - \alpha) = -\cos^۲\alpha$ است. از اتحاد مثلثاتی $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + ۲^۲ = ۵ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۵} = ۰/۲ \Rightarrow -\cos^۲\alpha = -۰/۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۹ پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق صورت سؤال نقاط $(۰,۶)$ و $(\frac{۲\pi}{۳},۰)$ بر روی تابع f قرار دارند و در ضابطهٔ آن صدق می‌کنند.

$$f(۰)=۶ \Rightarrow b+a\cos ۰=۶ \Rightarrow a+b=۶ \quad (۱)$$

$$f(\frac{۲\pi}{۳})=۰ \Rightarrow b+a\underbrace{\cos\frac{۲\pi}{۳}}_{\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})}=۰ \Rightarrow b-a\underbrace{\cos\frac{\pi}{۳}}_{\frac{۱}{۲}}=۰ \Rightarrow \frac{a}{۲}=b \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در (۱)}} a+\frac{a}{۲}=۶ \Rightarrow a=۴, b=۲$$

پس $f(x)=۲+۴\cos x$ است.

گام دوم: حاصل $f(-\frac{۵\pi}{۳})$ را به دست می‌آوریم.

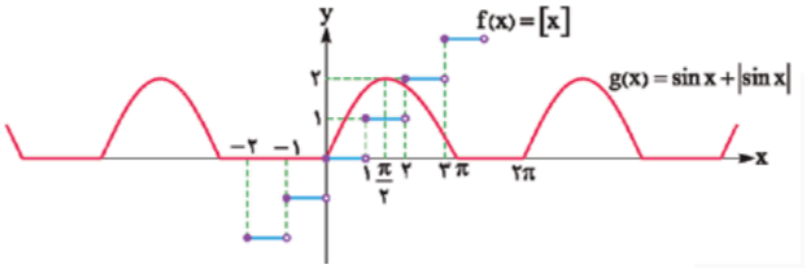
$$f(-\frac{۵\pi}{۳})=۲+۴\cos(-\frac{۵\pi}{۳})=۲+۴\cos(\underbrace{\frac{۵\pi}{۳}}_{۲\pi-\frac{\pi}{۳}})=۲+۴\underbrace{\cos\frac{\pi}{۳}}_{\frac{۱}{۲}}=۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۰ پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع g را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$g(x)=\sin x+|\sin x|=\begin{cases}\sin x+\sin x=۲\sin x & \sin x\geq ۰\\ \sin x-\sin x=۰ & \sin x<۰\end{cases}$$

گام دوم: نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای رسم تابع g، کافی است در محدوده‌هایی که نمودار $\sin x$ زیر محور xها است را برابر با صفر و در سایر محدوده‌ها آن را با ضریب ۲ در راستای قائم انبساط دهیم.



گام سوم: با توجه به نمودار، دو تابع f و g تنها در مبدأ مختصات مشترک هستند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۱ پاسخ تشریحی

گام اول: در تساوی $\tan\alpha-\cot\alpha=\sqrt{۲}$، عبارت‌های $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ و $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ را جای‌گذاری می‌کنیم و عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{۲}\Rightarrow\frac{\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{۲}\Rightarrow\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha=\sqrt{۲}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}(\sin^۲\alpha-\cos^۲\alpha)^۲=(\sqrt{۲}\sin\alpha\cos\alpha)^۲\Rightarrow\sin^۴\alpha-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha+\cos^۴\alpha=۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$$

$$\Rightarrow\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۴\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha\quad(۱)$$

گام دوم: با استفاده از اتحاد جبری $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲+b^۲-ab)$، عبارت مثلثاتی $\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha$ را تجزیه و ساده می‌کنیم.

$$\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha=(\sin^۲\alpha)^۳+(\cos^۲\alpha)^۳=(\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha)(\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha-\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha)$$

گام سوم: با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ و تساوی (۱) داریم:

$$\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha=(\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})(\underbrace{\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha}_{۴\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}-\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha)=۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha\quad(۲)$$

گام چهارم: از تساوی (۲)، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم.

$$\frac{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}{\sin^۶\alpha+\cos^۶\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}{۳\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}=\frac{۱}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۲

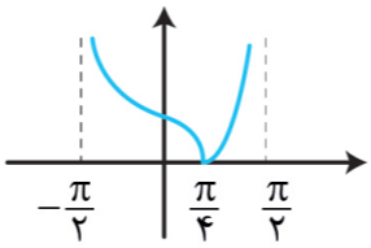
$$\sin x\cos x\cos ۴x=\frac{۱}{۶}\xrightarrow{\times\cos ۲x}\sin x\cos x\cos ۲x\cos ۴x=\frac{۱}{۶}\cos ۲x$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۸}\sin ۸x=\frac{۱}{۶}\cos ۲x\Rightarrow\frac{\sin ۸x}{\cos ۲x}=\frac{۴}{۳}$$

با توجّه به $\cos ۲x=\sin\left(\frac{\pi}{۲}+۲x\right)$، خواسته سؤال همین $\frac{۴}{۳}$ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۳



$$f(x)=\sqrt{(\tan x-۱)^۲}=|\tan x-۱|$$

بازه صعودی $(\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲})$ پس $b-a=\frac{\pi}{۴}$.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۴

$$\sin ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۲}{۳}\to۱+\tan^۲\alpha=۳\tan\alpha$$

طرفین را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و $\tan\alpha$ را t فرض می‌کنیم:

$$t^۲-۳t+۱=۰\to t=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}\xrightarrow{t>۱}t=\tan\alpha=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۵ نسبت‌های مثلثاتی را گسترش می‌دهیم.

$$\frac{\sin 5x}{\cos 5x} + 4\sin 5x\cos 5x = 5\sin 5x$$

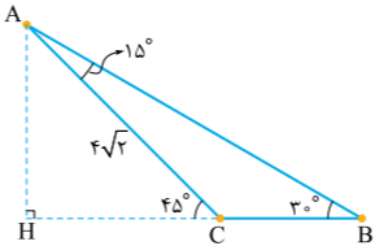
با فرض $\sin 5x \neq 0$ طرفین معادله را بر $\sin 5x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{\cos 5x} + 4\cos 5x = 5 \xrightarrow{\cos 5x = t} \frac{1}{t} + 4t = 5 \xrightarrow{\times t} 4t^2 - 5t + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \cos 5x = 1 \\ t = \frac{1}{4} \rightarrow \cos 5x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر $\cos 5x$ برابر ۱/۲۵ است.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۶ **پاسخ تشریحی**



گام اول: مطابق شکل مقابل، ضلع BC را از C امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ A عمود AH را بر آن وارد می‌کنیم. مطابق نکتهٔ فوق اندازهٔ زاویهٔ خارجی C در مثلث ABC برابر با $A\hat{C}H = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$ است.

گام دوم: مثلث ACH قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس:

$$\overset{\triangle}{ACH}: \sin A\hat{C}H = \frac{AH}{AC} \xrightarrow[AC=4\sqrt{2}]{A\hat{C}H=45^\circ} \sin 45^\circ = \frac{AH}{4\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{4\sqrt{2}} \Rightarrow AH = 4 \xrightarrow{AH=HC} HC = 4$$

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم:

$$\overset{\triangle}{ABH}: \tan B = \frac{AH}{BH} \xrightarrow[AH=4]{B=30^\circ} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{BH} \Rightarrow BH = 4\sqrt{3}$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال طول کوتاه‌ترین ضلع مثلث یعنی طول BC است.

$$BC = BH - CH = 4\sqrt{3} - 4 = 4(\sqrt{3} - 1)$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۷ **پاسخ تشریحی**

گام اول: با توجه به این‌که $\cos(\pi + x) = -\cos x$ است، ضابطهٔ تابع را کمی ساده‌تر می‌کنیم:

$$y = -3 - 2\cos(\pi + x) \Rightarrow y = -3 + 2\cos(x)$$

گام دوم: عرض نقطهٔ A را با قراردادن $x_A = 0$ در ضابطه به دست می‌آوریم.

$$\xrightarrow{x_A=0} y_A = -3 + 2\underbrace{\cos 0}_{1} = -1 \Rightarrow A\Big|_{-1}^{0}$$

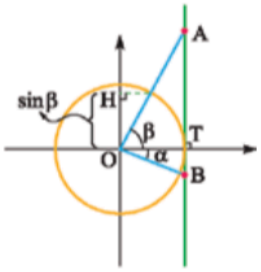
گام سوم: در نمودار تابع $y = \cos x$ می‌دانیم که طول اولین نقطهٔ مینیمم بعد از صفر، برابر با $x = \pi$ است. اگر نمودار تابع $y = \cos x$ را در راستای محور yها انبساط دهیم و سپس به طور عمودی جابه‌جا کنیم به نمودار تابع $y = -3 + 2\cos x$ می‌رسیم. از آن‌جایی که در انبساط و انتقال عمودی، طول نقاط تغییر نمی‌کند، پس طول اولین نقطهٔ مینیمم تابع $y = -3 + 2\cos x$ نیز برابر با $x_B = \pi$ است.

گام چهارم: شیب پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-1)}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۸ پاسخ تشریحی **گام اول:** مطابق شکل مقابل، طول OH برابر با $\sin\beta$ است.



$$OH = \sin\beta = \sqrt{۰/۷۵} = \sqrt{\frac{۳}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\beta \text{ حاده است.}} \beta = ۶۰^\circ$$

گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOT، زاویهٔ داخلی O برابر ۶۰° است، پس $\hat{A} = ۳۰^\circ$. از طرفی در دایرهٔ مثلثاتی $OT = ۱$ است، پس:

$$\overset{\triangle}{AOT} : \sin A = \frac{OT}{OA} \xrightarrow[OT=۱]{\hat{A}=۳۰^\circ} \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{OA} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{OA} \Rightarrow OA = ۲$$

گام سوم: در مثلث ABO، $AB = OA = ۲$ است، پس مثلث متساوی‌الساقین است. با داشتن زاویهٔ $\hat{A}$، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{O}B$ یا همان $\alpha + \beta$ به دست می‌آید.

$$\alpha + \beta = \frac{۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ}{۲} = ۷۵^\circ \xrightarrow{\beta=۶۰^\circ} \alpha = ۱۵^\circ$$

گام چهارم: با توجه به گزینه، زاویهٔ α را باید به رادیان تبدیل کنیم:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{۱۵^\circ}{۱۸۰^\circ} \Rightarrow \alpha = \frac{۱۵}{۱۸۰} \times \pi = \frac{\pi}{۱۲} \text{ رادیان}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۹ پاسخ تشریحی **گام اول:** طبق صورت سؤال تابع $y = \tan(\frac{\pi}{۳}x)$ به ازای xهای عضو بازهٔ $(\frac{a}{۲}, \frac{۲۱}{۲})$ اکیداً صعودی است؛ پس:

$$\frac{a}{۲} < x < \frac{۲۱}{۲} \xrightarrow{\times\frac{\pi}{۳}} \frac{a}{۲} \times \frac{\pi}{۳} < \frac{\pi}{۳}x < \frac{۲۱}{۲} \times \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{a\pi}{۶} < \underbrace{\frac{\pi}{۳}x}_{u} < \frac{۷\pi}{۲}$$

گام دوم: از مقایسهٔ عدد انتهای بازه، یعنی $\frac{۷\pi}{۲}$ با عدد انتهای بازه که در نکته توضیح داده شده، یعنی $k\pi + \frac{\pi}{۲}$ نتیجه می‌گیریم:

$$k\pi + \frac{\pi}{۲} = \frac{۷\pi}{۲} = ۳\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow k = ۳ \Rightarrow k\pi - \frac{\pi}{۲} = ۳\pi - \frac{\pi}{۲} = \frac{۵\pi}{۲}$$

پس طبق نکته تابع $y = \tan u$ در بازهٔ $(\frac{۵\pi}{۲}, \frac{۷\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است که در این‌جا $u = \frac{\pi}{۳}x$ است.

گام سوم: $\frac{a\pi}{۶}$ باید با $\frac{۵\pi}{۲}$ برابر باشد:

$$\frac{۵\pi}{۲} = \frac{a\pi}{۶} \Rightarrow a = ۱۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** از آن‌جایی که نسبت مثلثاتی خواسته‌شده برحسب کمان $\frac{\alpha}{۲}$ است، پس در تساوی داده‌شده، از روابط نصف کمان استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\sin\alpha}{۱+\cos\alpha}=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow[۱+\cos\alpha=۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}]{\sin\alpha=۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}} \frac{۲\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}{۲\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{۲}=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\cot\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱}{\tan\frac{\alpha}{۲}}} \cot\frac{\alpha}{۲}=-۲ \quad (۱)$$

گام دوم: عبارت خواسته‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\tan(\frac{\alpha}{۲}-\frac{۳\pi}{۲})=\tan(\frac{\alpha}{۲}-\frac{\pi}{۲}-\pi) \xrightarrow[\text{کمان تانژانت می‌توانیم حذف کنیم.}]{\text{مضارب صحیح } \pi \text{ را از داخل}} \underbrace{\tan(}_{\text{ربع چهارم:}\tan<۰} \underbrace{\frac{\alpha}{۲}-\frac{\pi}{۲}}_{\text{تغییر نسبت}})=-\underbrace{\cot}\frac{\alpha}{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری از (۱)}} \text{خواستهٔ سؤال}=-(-۲)=۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** از اتحاد $\sin^۲x=\frac{۱-\cos۲x}{۲}$ استفاده می‌کنیم و تساوی داده‌شده را برحسب کمان ۲α می‌نویسیم:

$$\sin^۲(\frac{\pi}{۸}+\alpha)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱-\cos(۲(\overbrace{\frac{\pi}{۸}+\alpha}^{\frac{\pi}{۴}+۲\alpha}))}{۲}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۱-\cos(\frac{\pi}{۴}+۲\alpha)=\frac{۴}{۳} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۴}+۲\alpha)=-\frac{۱}{۳}$$

گام دوم: با فرض $\frac{\pi}{۴}+۲\alpha=x$، نتیجه می‌گیریم:

$$۲\alpha=x-\frac{\pi}{۴} \xrightarrow{\times ۲} ۴\alpha=۲x-\frac{\pi}{۲} \quad (۱) \ , \ \cos x=-\frac{۱}{۳} \quad (۲)$$

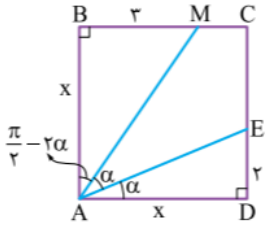
گام سوم: خواستهٔ سؤال $\cos(۴\alpha-\frac{\pi}{۲})$ است.

$$\cos(۴\alpha-\frac{\pi}{۲}) \overset{(۱)}{=} \cos(۲x-\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۲})=\cos(۲x-\pi)=-\cos(۲x)$$

$$\overset{\cos۲x=۲\cos^۲x-۱}{=\!=} -(۲\cos^۲x-۱)=۱-۲\cos^۲x \overset{(۲)}{=\!=} ۱-۲(-\frac{۱}{۳})^۲=\frac{۷}{۹}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ضلع مربع را x فرض می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ADE و ABM داریم:



$$\overset{\Delta}{ADE}: \tan\alpha = \frac{۲}{x} \quad (۱) \qquad \overset{\Delta}{ABM}: \cot\left(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha\right) = \frac{x}{۳}$$

$$\xrightarrow{\cot\left(\frac{\pi}{۲}-۲\alpha\right)=\tan ۲\alpha} \tan ۲\alpha = \frac{x}{۳} \quad (۲)$$

گام دوم: اتحاد مثلثاتی $\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ را می‌نویسیم و در آن (۱) و (۲) را جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\frac{x}{۳} = \frac{۲\left(\frac{۲}{x}\right)}{۱-\left(\frac{۲}{x}\right)^۲} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{\frac{۴}{x}}{۱-\frac{۴}{x^۲}} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{\frac{۴}{x}}{\frac{x^۲-۴}{x^۲}} \Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{۴x}{x^۲-۴}$$

$$\xrightarrow{\div x} \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{x^۲-۴} \Rightarrow x^۲-۴=۱۲ \Rightarrow x^۲=۱۶ \xrightarrow{x>۰} x=۴$$

گام سوم: در مثلث ABM رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم تا طول AM به دست آید.

$$AM = \sqrt{x^۲+۳^۲} = \sqrt{۴^۲+۳^۲} = ۵$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۳ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲ x = ۱-\sin^۲ x$ استفاده می‌کنیم.

$$۳\sin^۲ x + ۵ = ۲\underbrace{\cos^۲ x}_{۱-\sin^۲ x} + ۷ \Rightarrow ۳\sin^۲ x + ۵ = ۲ - ۲\sin^۲ x + ۷ \Rightarrow ۵\sin^۲ x = ۴$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

گام دوم: نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم می‌کنیم. تعداد نقاط تلاقی نمودار با خط‌های $y=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ، $y=-\frac{۲}{\sqrt{۵}}$، برابر با تعداد جواب‌های معادله در این بازه است.



توجه کنید که $\frac{۲}{\sqrt{۵}} \simeq ۰/۹$ است.

دو خط $y=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$ ، $y=-\frac{۲}{\sqrt{۵}}$، نمودار تابع $y=\sin x$ را مجموعاً در چهار نقطه قطع می‌کنند، پس معادله چهار جواب دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۴ **پاسخ تشریحی**

گام اول: معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}-\frac{۱}{\cos ۳x}=۰ \Rightarrow \frac{۱}{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}=\frac{۱}{\cos ۳x} \xrightarrow[\sin(x-\frac{\pi}{۶})\neq ۰]{\cos ۳x\neq ۰} \cos ۳x=\sin(x-\frac{\pi}{۶})$$

$$\xrightarrow{\cos\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})} \sin(۳x+\frac{\pi}{۲})=\sin(x-\frac{\pi}{۶}) \quad (۱)$$

گام دوم: نسبت‌های مثلثاتی را هم‌نام می‌کنیم:

گام سوم: جواب‌های کلی معادلهٔ (۱) را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} ۳x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+x-\frac{\pi}{۶} \\ ۳x+\frac{\pi}{۲}=۲k\pi+\pi-(x-\frac{\pi}{۶}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\div ۲} \\ ۴x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\div ۴} \end{cases} \begin{cases} x=k\pi-\frac{\pi}{۳} \\ x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

گام چهارم: در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ جواب‌ها را پیدا می‌کنیم:

	بالایی		پایینی			
k	۱	۲	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۳}$

جواب‌های $x=\frac{۷\pi}{۶}$ و $x=\frac{\pi}{۶}$ به دلیل این‌که مخرج کسر معادله را صفر می‌کنند، قابل قبول نیستند؛ پس فقط جواب‌های $x=\frac{۲\pi}{۳}$ و $x=\frac{۵\pi}{۳}$ (که هر دو مضاعف هم هستند) جواب معادله هستند، یعنی معادله دو جواب متمایز در بازهٔ $(۰,۲\pi)$ دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۵ **پاسخ تشریحی**

گام اول: ابتدا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را ساده می‌کنیم.

$$\cot(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}-x}_{\text{ربع سوم}})=+\tan x$$

تغییر نسبت

$$\tan(\pi-x)=\tan(-x)=-\tan x$$

$$\cot(\underbrace{x+\frac{\pi}{۲}}_{\text{ربع دوم}})=-\tan x$$

تغییر نسبت

$$\cot(x-۲\pi)=\cot x$$

گام دوم: با استفاده از گام اول، معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$\frac{-\tan x-۳\tan x}{-۲\tan x+۲\cot x}=-۲ \Rightarrow \frac{-۴\tan x}{-۲\tan x+۲\cot x}=-۲ \Rightarrow \frac{\tan x}{\tan x-\cot x}=-۱ \Rightarrow \tan x=-\tan x+\cot x$$

$$\Rightarrow ۲\tan x=\underbrace{\cot x}_{\frac{۱}{\tan x}} \Rightarrow ۲\tan^۲ x=۱ \Rightarrow \tan^۲ x=\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: با استفاده از اتحاد $۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ داریم:

$$\underbrace{۱+\frac{۱}{۲}}_{\frac{۳}{۲}}=\frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow \cos^۲ x=\frac{۲}{۳}$$

پس اگر $x=\alpha$ جواب معادله باشد، داریم $\cos^۲\alpha=\frac{۲}{۳}$.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۶ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا ارتباطی بین ضابطهٔ توابع g و fog به دست می‌آوریم. برای این منظور عبارت $\sin x+\cos x$ را به توان ۲ می‌رسانیم و در ادامه از اتحادهای مثلثاتی $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ و $۲\sin x\cos x=\sin ۲x$ استفاده می‌کنیم.

$$(\sin x+\cos x)^۲=\underbrace{\sin^۲ x+\cos^۲ x}_{۱}+\underbrace{۲\sin x\cos x}_{\sin ۲x}\Rightarrow \sin ۲x=(\sin x+\cos x)^۲-۱ \quad (*)$$

گام دوم: ضابطهٔ تابع fog را بازنویسی می‌کنیم.

$$f(\underbrace{g(x)}_{\sin x+\cos x})=\sin ۲x \xrightarrow{(*)} f(\sin x+\cos x)=(\sin x+\cos x)^۲-۱$$

گام سوم: با استفاده از تغییر متغیر $t=\sin x+\cos x$، ضابطهٔ تابع f را بازنویسی می‌کنیم.

$$f(t)=t^۲-۱$$

گام چهارم: خواستهٔ سؤال $f(\frac{۱}{۳})$ است که برابر با $(\frac{۱}{۳})^۲-۱=-\frac{۸}{۹}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۷ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$\cos(bx-\frac{۳\pi}{۲})=\cos(\underbrace{\frac{۳\pi}{۲}-bx}_{\cos<۰:\text{ربع سوم}})=-\sin(bx) \quad \text{(تغییر نسبت)}$$

$$\Rightarrow f(x)=a-۴\cos bx(-\sin bx)=a+۲(\underbrace{۲\sin bx\cos bx}_{\sin ۲bx})\Rightarrow f(x)=a+۲\sin ۲bx$$

گام دوم: طبق نمودار، فاصلهٔ بین یک مینیمم و ماکزیمم متوالی از نمودار تابع سینوسی برابر با $\frac{۳\pi}{۴}-(-\frac{۳\pi}{۴})=\frac{۳\pi}{۲}$ است که می‌دانیم این فاصله برابر با $\frac{T}{۲}$ است؛ پس:

$$\frac{T}{۲}=\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow T=۳\pi \quad (۱)$$

گام سوم: طبق ضابطهٔ تابع، دورهٔ تناوب برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{|۲b|}=\frac{\pi}{|b|}\xrightarrow{(۱)}\frac{\pi}{|b|}=۳\pi\Rightarrow |b|=\frac{۱}{۳}$$

توجه کنید که چون شروع نمودار بعد از $x=۰$، به صورت صعودی است، پس ضریب b مثبت است یعنی $b=\frac{۱}{۳}$ قابل قبول است؛ در نتیجه $f(x)=a+۲\sin\frac{۲x}{۳}$ است.

گام چهارم: ماکزیمم نمودار برابر با یک است؛ پس:

$$y_{max}=a+|۲|=۱\Rightarrow a=-۱\Rightarrow f(x)=-۱+۲\sin\frac{۲x}{۳}$$

گام پنجم: خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$f(-۳b\pi)\overset{b=\frac{۱}{۳}}{=\!=}f(-\pi)=-۱+۲\sin(-\frac{۲\pi}{۳})=-۱-۲\sin\underbrace{(\frac{۲\pi}{۳})}_{\pi-\frac{\pi}{۳}}=-۱-۲\underbrace{\sin\frac{\pi}{۳}}_{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=-۱-\sqrt{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** برای آن‌که تابع $f(x)=-۲\cos(\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۳}x)$ دارای بیشترین مقدار باشد، باید $\cos(\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۳}x)=-۱$ باشد.

گام دوم: معادلهٔ $\cos(\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۳}x)=-۱$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{\pi}{۸}-\frac{\pi}{۳}x=۲k\pi+\pi \xrightarrow{\div\pi} \frac{۱}{۸}-\frac{x}{۳}=۲k+۱ \xrightarrow{-\frac{۱}{۸}} -\frac{x}{۳}=۲k+\frac{۷}{۸} \xrightarrow{\times(-۳)} x=-۶k-\frac{۲۱}{۸}\ (k\in\mathbb{Z})$$

گام سوم: طبق صورت سؤال برای $x>۰$، جواب‌ها را می‌نویسیم تا به α برسیم.

$$k=-۱ \Rightarrow x=۶-\frac{۲۱}{۸}=\frac{۲۷}{۸}$$
$$k=-۲ \Rightarrow x=۱۲-\frac{۲۱}{۸}=\frac{۷۵}{۸}$$
$$k=-۳ \Rightarrow x=۱۸-\frac{۲۱}{۸}=\frac{۱۲۳}{۸}$$

بنابراین حداکثر مقدار ممکن $\alpha-\frac{۱}{۸}$ برابر $\frac{۱۲۳}{۸}$ است، یعنی تابع در بازهٔ $(۰,\underbrace{\frac{۱۲۳}{۸}}_{\alpha-\frac{۱}{۸}})$ در دو نقطه دارای بیشترین مقدار است؛ پس حداکثر α برابر با $\frac{۱۲۳}{۸}+\frac{۱}{۸}=۱۵/۵$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۹ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cot\alpha-\tan\alpha=۲\cot۲\alpha$ ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم.

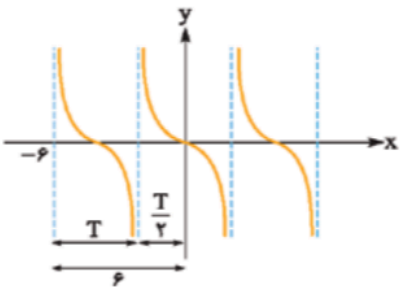
$$f(x)=\underbrace{\cot\frac{x}{۲}}_{\alpha}-\underbrace{\tan\frac{x}{۲}}_{\alpha}=۲\cot\underbrace{x}_{۲\alpha}$$

گام دوم: با استفاده از گام اول، ضابطهٔ تابع y را ساده می‌کنیم.

$$y=f(\frac{۱۳\pi}{۲}+ax)=۲\cot(\underbrace{\frac{۱۳\pi}{۲}+ax}_{۶\pi+\frac{\pi}{۲}+ax})=۲\cot(\underbrace{\frac{\pi}{۲}+ax}_{\cot<۰:\text{ربع دوم}})=-۲\tan ax \Rightarrow y=-۲\tan ax$$

(تغییر نسبت)

گام سوم: دورهٔ تناوب تابع y طبق ضابطهٔ آن برابر با $T=\frac{\pi}{|a|}$ است. دورهٔ تناوب آن را از روی نمودار نیز به دست می‌آوریم.



بنابراین:

$$T+\frac{T}{۲}=۶ \Rightarrow \frac{۳T}{۲}=۶ \Rightarrow T=۴$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{|a|}=۴ \Rightarrow |a|=\frac{\pi}{۴} \Rightarrow a=\pm\frac{\pi}{۴}$$

گام چهارم: نمودار تابع $y=-۲\tan ax$ در هر دورهٔ تناوب آن نزولی است، پس باید $y=\tan ax$ در هر دورهٔ تناوب آن رفتار صعودی داشته باشد؛ در نتیجه ضریب a باید مثبت باشد، پس تنها $a=\frac{\pi}{۴}$ قابل قبول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** معادله را ساده می‌کنیم.

$$\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\cos(\frac{\pi}{۲}-x)=\sin x$$

بنابراین معادله به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\cos x-۱}{\sin x}=\frac{۱}{۱+\cos x} \xrightarrow[\text{طرفین‌وسطین می‌کنیم.}]{\text{باشرط مخرج‌ها مخالف صفر،}} \underbrace{(\cos x-۱)(\cos x+۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=\sin x \Rightarrow \underbrace{\cos^۲ x-۱}_{-\sin^۲ x}=\sin x$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x+\sin x=۰ \Rightarrow \sin x(\sin x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}\sin x=۰ \text{ غ‌ق‌ق}\\ \sin x=-۱\end{cases}$$

توجه کنید که جواب $\sin x=۰$ به دلیل این‌که مخرج کسر را صفر می‌کند، قابل قبول نیست.

گام دوم: از $\sin x=-۱$ جواب‌های داخل محدودهٔ $[۰,۳/۵\pi]$ را به دست می‌آوریم.

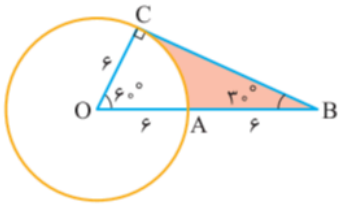
$$\sin x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow$$

k	۰	۱
x	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\underbrace{\frac{۷\pi}{۲}}_{۳/۵\pi}$

گام سوم: مجموع جواب‌های قابل قبول در محدودهٔ $[۰,۳/۵\pi]$ برابر با ۵π است. $\frac{۳\pi}{۲}+\frac{۷\pi}{۲}=۵\pi$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** محیط دایره $۲\pi r=۱۲\pi$ است پس شعاع دایره برابر با ۶ است.



گام دوم: خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است، پس مثلث OBC قائم‌الزاویه است. رابطهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم.

$$OB^۲=OC^۲+BC^۲ \Rightarrow ۱۲^۲=۶^۲+BC^۲ \Rightarrow BC^۲=۱۰۸ \Rightarrow BC=۶\sqrt{۳}$$

گام سوم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC، ضلع مقابل زاویهٔ B، نصف وتر است، پس زاویهٔ B برابر با ۳۰° و زاویهٔ O متمم آن و برابر با ۶۰° یا $\frac{\pi}{۳}$ رادیان است.

گام چهارم: طول کمان AC را به دست می‌آوریم.

$$\overset{\frown}{AC}=R\alpha=۶\times\frac{\pi}{۳}=۲\pi$$

گام پنجم: محیط قسمت رنگی را می‌نویسیم و آن را برابر با $۲(۲\sqrt{۳}+L)$ قرار می‌دهیم.

$$\text{محیط قسمت رنگی}=\overset{\frown}{AC}+AB+BC=۲\pi+۶+۶\sqrt{۳}=۲\underbrace{(\pi+۳+۳\sqrt{۳})}_{\pi+۳+\sqrt{۳}+۲\sqrt{۳}} \xrightarrow{\text{مقایسه با } ۲(۲\sqrt{۳}+L)} L=\pi+۳+\sqrt{۳}$$

گام ششم: حال باید $[L]$ را حساب کنیم. توجه کنید که $\pi\simeq ۳/۱۴$ و $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ است.

$$[\pi+۳+\sqrt{۳}]=۳+[۳/۱۴+۱/۷]=۳+[۴/۸۴]=۳+۴=۷$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$، ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=a\sin(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}x)\cos(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}x)+b=\frac{a}{۲}\sin(۲\times(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}x))+b=\frac{a}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}x)+b$$

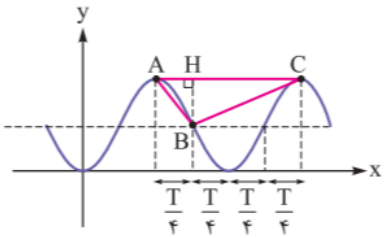
گام دوم: حال با حذف کمان $\frac{\pi}{۲}$، نسبت مثلثاتی را برحسب کمان $\frac{\pi}{۲}x$ می‌نویسیم.

ربع دوم: $\sin>۰$

$$f(x)=\frac{a}{۲}\sin(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}x)+b=+\frac{a}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}x)+b$$

تغییر نسبت

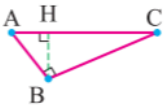
گام سوم: دورهٔ تناوب تابع f برابر با $T=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$ است، پس مطابق شکل مقابل، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم متوالی یعنی A و C برابر با دورهٔ تناوب تابع است؛ پس $AC=۴$. هم‌چنین فاصلهٔ افقی دو نقطهٔ A و B برابر با $\frac{T}{۴}$ است که مساوی با $AH=\frac{۴}{۴}=۱$ می‌شود؛ در نتیجه $CH=AC-AH=۴-۱=۳$ است.



گام چهارم: از طرف دیگر، طبق نمودار $BH=\frac{\max-\min}{۲}$ است. هم‌چنین می‌دانیم:

$$\begin{cases}\max=|\frac{a}{۲}|+b\\ \min=-|\frac{a}{۲}|+b\end{cases}\Rightarrow \max-\min=(\frac{|a|}{۲}+b)-(-\frac{|a|}{۲}+b)=|a|\Rightarrow BH=\frac{|a|}{۲}$$

گام پنجم: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، برای ارتفاع وارد بر وتر داریم:



$$BH^۲=AH\times CH\Rightarrow\frac{a^۲}{۴}=۱\times۳\Rightarrow a^۲=۱۲\Rightarrow a=\pm۲\sqrt{۳}$$

گام ششم: از آن‌جایی که نمودار تابع $f(x)=\frac{a}{۲}\cos(\frac{\pi}{۲}x)+b$ با شروع از محور yها، ابتدا به سمت بالا می‌رود، پس باید ضریب کسینوس منفی باشد؛ در نتیجه تنها مقدار $a=-۲\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۳ **پاسخ تشریحی**

گام اول: در معادلهٔ اصلی با جای‌گذاری $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ داریم:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

گام دوم: از تغییر متغیر $\sin x = t$ کمک می‌گیریم:

$$\Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

گام سوم: ریشه‌های معادله را با روش روسی محاسبه می‌کنیم:

ضرب

$$2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = +4 \end{cases}$$

بنابراین ریشه‌های معادلهٔ $2t^2 - 3t - 2 = 0$ برابر هستند با:

$$\begin{cases} t = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

گام چهارم: با جای‌گذاری $\sin x = t$ داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \quad \checkmark \\ \sin x = 2 \quad \times \text{ غیر قابل قبول } (-1 \le \sin x \le 1) \end{cases}$$

گام پنجم: حالا باید معادلهٔ مثلثاتی $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنیم، به جای $-\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم $\sin(-\frac{\pi}{6})$، پس:

$$\sin(x) = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{6}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

گام ششم: جواب‌های معادله در بازهٔ $(0, 2\pi)$ را می‌خواهیم:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \frac{11\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{18\pi}{6} = 3\pi$$

پس جواب برابر 3π می‌شود.

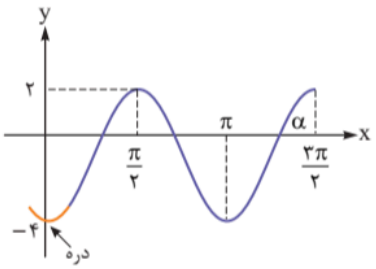
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به نمودار تابع، از $x=0$ تا $x=\pi$ یک تناوب کامل داریم، پس دورهٔ تناوب برابر $T=\pi$ است. از طرفی دورهٔ تناوب تابع $y=c+a\cos bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=2 \Rightarrow b=\pm 2$$

از طرفی می‌دانیم کسینوس منفی‌خوار است، یعنی $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$، پس علامت b تأثیری در جواب ندارد و می‌توانیم فرض کنیم $b=+2$.

گام دوم: نمودار تابع در محل برخورد با محور yها به شکل دره است، پس علامت ضریب کسینوس، یعنی a منفی می‌شود.



گام سوم: از طرفی حداکثر و حداقل مقدار تابع به ترتیب برابر $+2$ و -4 است، پس:

$$\begin{matrix}\max: c+|a|=2\\ \min: c-|a|=-4\end{matrix} \xrightarrow[|a|=-a]{a\text{ منفی}} \begin{cases}c-a=2\\ c+a=-4\end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{matrix}a=-3\\ c=-1\end{matrix}$$

گام چهارم: بنابراین ضابطهٔ تابع به شکل $f(x)=-1-3\cos 2x$ می‌شود. برای پیداکردن α، باید معادلهٔ $f(x)=0$ را حل کنیم:

$$f(x)=0 \Rightarrow -1-3\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 2x=-\frac{1}{3}$$

گام پنجم: α ریشهٔ معادلهٔ $\cos 2x=-\frac{1}{3}$ است، پس $\cos 2\alpha=-\frac{1}{3}$ می‌شود.

از طرفی داریم:

$$1+\tan^2(2\alpha)=\frac{1}{\cos^2(2\alpha)} \Rightarrow 1+\tan^2(2\alpha)=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9 \Rightarrow \tan^2(2\alpha)=8 \Rightarrow \tan(2\alpha)=\pm 2\sqrt{2}$$

گام ششم: در بین گزینه‌ها هم $2\sqrt{2}$ و هم $-2\sqrt{2}$ را داریم. حالا برای این‌که بفهمیم جواب کدام است، باید حدود α را بیابیم. با توجه به نمودار، واضح است که $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ است، پس $2\pi<2\alpha<3\pi$ می‌شود؛ یعنی 2α یا در ربع اول است و یا در ربع دوم، اما می‌دانیم کسینوس در ربع دوم منفی است و چون $\cos 2\alpha=-\frac{1}{3}$، پس 2α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار می‌گیرد که در آن‌جا مقدار تانژانت هم منفی است، پس $\tan 2\alpha=-2\sqrt{2}$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** سعی می‌کنیم در معادلهٔ داده‌شده، توان ۲ را از بین ببریم. از فرمول‌های توان‌شکن استفاده می‌کنیم:

$$\cos^2 3x=\cos 2x+\sin^2 x \Rightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}=\cos 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\cos 6x=2\cos 2x+1-\cos 2x \Rightarrow \cos 6x=\cos 2x$$

گام دوم: حالا جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$6x=2k\pi\pm 2x \Rightarrow \begin{cases}4x=2k\pi\\ 8x=2k\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{k\pi}{4}\end{cases} \xrightarrow[[0,\pi]]{\text{جواب‌ها در بازهٔ}} 0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$$

گام سوم: مجموع جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,\pi]$ برابر با $\frac{5\pi}{2}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۶

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}{\sin x\cos x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}=۴$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$$

$$(\sin x-\cos x)^{۲}=۱-۲\sin x\cos x=۱-\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$(\sin x-\cos x)=\pm\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

اما می‌دانیم:

$$۵\pi<۴x<۶\pi \Rightarrow \frac{۵\pi}{۴}<x<\frac{۶\pi}{۴}$$



پس داریم:

$$\sin x<۰ \quad , \quad \cos x<۰ \quad , \quad \sin x<\cos x$$

$$\Rightarrow (\sin x-\cos x)<۰ \Rightarrow \sin x-\cos x=-\sqrt{\frac{۱}{۲}}$$

حال برای محاسبه خواسته سؤال می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{\sin^{۳}x-\cos^{۳}x}=\frac{۱}{(\sin x-\cos x)(\sin^{۲}x+\cos^{۲}x+\sin x\cos x)}$$

$$=\frac{۱}{\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۴}\right)}=\frac{۱}{-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۵}{۴}}=\frac{-۸}{۵\sqrt{۲}}=\frac{-۸\sqrt{۲}}{۱۰}$$

$$=-۰/۸\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۷

$$T=\frac{\pi}{|b|}=۵\pi \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۵} \qquad (۱)$$

$$y=\frac{a}{۲}\left[۱-\cos ۲\left(\frac{\pi}{۴}-bx\right)\right]+c=\frac{a}{۲}\left[۱-\cos\left(\frac{\pi}{۲}-۲bx\right)\right]+c$$

$$=\frac{a}{۲}(۱-\sin ۲bx)+c=-\frac{a}{۲}\sin ۲bx+\left(\frac{a}{۲}+c\right)$$

$$\frac{|a|}{۲}=\frac{۱-(-۲)}{۲}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow |a|=۳ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} |ab|=\frac{۳}{۵}=۰/۶$$

با امتحان a و b هم علامت به تناقض می‌رسیم. همچنین با محاسبه مشتق تابع به‌دست آمده در صفر نیز، به این نتیجه می‌رسیم که a و b مختلف‌العلامت باشند، پس: $ab=-۰/۶$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۸

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+۲x)=-\cos(\frac{\pi}{۲}+۴x)\Rightarrow \cos ۲x=\sin ۴x$$

$$\Rightarrow \cos ۲x(۲\sin ۲x-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases}\cos ۲x=۰\to x=\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴} & \text{هردو غ ق ق}\\ \sin ۲x=\frac{۱}{۲}\to x=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۵\pi}{۱۲}\end{cases}$$

$$\alpha=\frac{۵\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۳}$$

$$\tan ۲\alpha=\tan\frac{۲\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۹ توجه به فرض داده شده داریم:

$$۱-\tan x-\frac{۱}{\frac{\sin x}{\cos x}+۱}=\frac{-۱}{۲}\Rightarrow ۱-\tan x-\frac{۱}{\tan x+۱}=\frac{-۱}{۲}$$

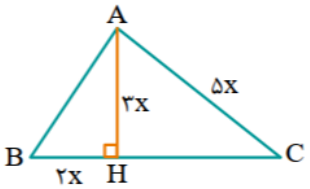
$$\tan x=a\Rightarrow ۱-a-\frac{۱}{a+۱}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲a^{۲}-a-۱=۰\Rightarrow \begin{cases}a=۱\\ a=-\frac{۱}{۲}\end{cases}\Rightarrow \tan x=-\frac{۱}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۰ با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

در مثلث AHC مطابق قضیه فیثاغورس $HC=۴x$، پس:



$$\begin{matrix}BC=۶x\\ AH=۳x\end{matrix}\Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۸x^{۲}=۹x^{۲}$$

$$۹x^{۲}=۳۶\Rightarrow x=۲\Rightarrow \begin{cases}AC=۱۰\\ BC=۱۲\\ AB=\sqrt{AH^{۲}+BH^{۲}}=\sqrt{۹x^{۲}+۴x^{۲}}=\sqrt{۱۳}x=۲\sqrt{۱۳}\end{cases}\Rightarrow BC-AB=۱۲-۲\sqrt{۱۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۱

$$\tan\alpha+\frac{۲}{\tan\alpha}=۳\Rightarrow \tan^{۲}\alpha-۳\tan\alpha+۲=۰\Rightarrow \tan\alpha=۲,۱\xrightarrow{\frac{\pi}{۴}<\alpha<\frac{\pi}{۲}}\tan\alpha=۲$$

$$\Rightarrow P=\frac{\sin ۲\alpha}{۲\cos^{۴}\alpha}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^{۴}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos^{۳}\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}=\tan\alpha(۱+\tan^{۲}\alpha)=۲\times۵=۱۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۲

$$A=\frac{۴\sin^{۲}۱۵^{\circ}-۴\cos^{۲}۱۵^{\circ}}{۱۶\sin^{۲}۱۵^{\circ}\cos^{۲}۱۵^{\circ}}=\frac{\sin^{۲}۱۵^{\circ}-\cos^{۲}۱۵^{\circ}}{۴\sin^{۲}۱۵^{\circ}\cos^{۲}۱۵^{\circ}}=\frac{-\cos ۳۰^{\circ}}{(۲\sin ۱۵^{\circ}\cos ۱۵^{\circ})^{۲}}$$

$$A=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{(\sin ۳۰^{\circ})^{۲}}=\frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=-۲\sqrt{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۳ ابتدا هر یک را ساده می‌کنیم:

$$\tan(\alpha-۳\pi)=\tan\alpha$$

$$\tan(\frac{۷\pi}{۲}+\alpha)=\tan(۳\pi+\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\cot\alpha$$

$$\cot(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\tan\alpha$$

$$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

$$\frac{\tan\alpha+۲\cot\alpha}{-\tan\alpha+۳\cot\alpha}=-۶\Rightarrow\tan\alpha+۲\cot\alpha=۶\tan\alpha-۱۸\cot\alpha\Rightarrow۵\tan\alpha=۲۰\cot\alpha$$

حال جایگزین می‌کنیم:

$$\tan\alpha=۴\times\frac{۱}{\tan\alpha}\Rightarrow\tan\alpha=\pm۲\Rightarrow\frac{۱}{\cos^۲\alpha}=۱+\tan^۲\alpha$$

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=-\frac{۳}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۴

$$۲a-b=\frac{\pi}{۶}\Rightarrow۶a-۳b=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow۶a-b-۲b=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\cos(۶a-b)=\cos(\frac{\pi}{۲}+۲b)=-\sin۲b\Rightarrow-\sin۲b=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin۲b=\frac{۳}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۵ چون A روی دایره مثلثاتی است، پس:

$$A\begin{vmatrix}\cos\alpha=x\\ \sin\alpha=۱-۲x\end{vmatrix}\Rightarrow x^۲+(۱-۲x)^۲=۱$$

$$۴x^۲-۴x+x^۲=۰\Rightarrow۵x^۲=۴x\Rightarrow\begin{cases}x=۰ \text{ غ ق ق}\\ x=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

$$A\begin{vmatrix}\frac{۴}{۵}\\ -\frac{۳}{۵}\end{vmatrix},\ B\begin{vmatrix}۰\\ -\frac{۳}{۵}\end{vmatrix}\quad O\begin{vmatrix}۰\\ ۰\end{vmatrix}$$

$$\text{مساحت } S=\frac{۱}{۲}\times OB\times AB=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۵}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۱۲}{۵۰}=\frac{۶}{۲۵}$$

$$\text{محیط } P=AB+OB+OA=\frac{۴}{۵}+\frac{۳}{۵}+۱=\frac{۱۲}{۵}=\frac{۶۰}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\frac{S}{P}=\frac{۶}{۶۰}=\frac{۱}{۱۰}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۶ انتهای کمان α در ناحیه دوم یا چهارم است $\Rightarrow\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ مختلف العلامت هستند $\Rightarrow\sin۲\alpha<۰\Rightarrow۲\sin\alpha\cos\alpha<۰$

از طرفی:

$$\tan\alpha<\frac{۱}{\tan\alpha}\xrightarrow{\tan\alpha<۰}\tan^۲\alpha>۱\Rightarrow\tan\alpha>۱\text{ یا }\tan\alpha<-۱$$

با توجه به آن‌که α در ناحیه دوم یا چهارم است و $\tan\alpha<۰$، پس: $\tan\alpha<-۱$



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۷

$$S=\frac{۱}{۲}(\sin\theta+\tan\theta)(۱-\cos\theta)=\frac{۱}{۲}\frac{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta}(۱-\cos\theta)$$

$$=\frac{۱}{۲}\frac{\sin\theta(۱-\cos^۲\theta)}{\cos\theta}=\frac{۱}{۲}\frac{\sin^۳\theta}{\cos\theta}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\frac{\sin^۳\theta}{\cos\theta}=\sin^۲\theta\Rightarrow\tan\theta=۲$$

$$\cos۲\theta=\frac{۱-\tan^۲\theta}{۱+\tan^۲\theta}=\frac{۱-۴}{۱+۴}=-۰/۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۸ از اتحاد $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$ استفاده می‌کنیم:

$$۳ + ۲\cos^۲ x - ۱ = ۴\sin^۲ x \Rightarrow ۲ + ۲\cos^۲ x = ۴\sin^۲ x \Rightarrow \cos^۲ x - ۲\sin^۲ x + ۱ = ۰$$

طرفین را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۱ - ۲\tan^۲ x + \frac{۱}{\cos^۲ x} = ۰ \Rightarrow ۱ - ۲\tan^۲ x + (۱ + \tan^۲ x) = ۰ \Rightarrow ۲ - \tan^۲ x = ۰ \Rightarrow \tan^۲ x = ۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۹

$$\sin\frac{۵\pi}{۸}\tan\frac{۱۱\pi}{۸} = \sin(\pi - \frac{۳\pi}{۸})\tan(\pi + \frac{۳\pi}{۸}) = \sin\frac{۳\pi}{۸}\tan\frac{۳\pi}{۸} = \frac{\sin^۲\frac{۳\pi}{۸}}{\cos\frac{۳\pi}{۸}} \Rightarrow \frac{۱ - \cos^۲\frac{۳\pi}{۸}}{\cos\frac{۳\pi}{۸}} = \frac{\frac{۱۷}{۲۰}}{\sqrt{\frac{۳}{۲۰}}} = \frac{۱۷}{\sqrt{۲۰}\sqrt{۳}} = \frac{۱۷\sqrt{۳}}{۳\times\sqrt{۲۰}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۰

$$O\hat{A}B : \hat{B} = \alpha \Rightarrow \sin B = \frac{۱}{OB} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{OB}$$

$$MB = OB - ۱ \Rightarrow MB = \frac{۱}{\sin\alpha} - ۱$$

از طرفی:

$$\sin ۲\alpha = \frac{\sqrt{۵}}{۳} \Rightarrow \cos ۲\alpha = \frac{۲}{۳} \text{ یا } \cos ۲\alpha = -\frac{۲}{۳}$$

$$\cos ۲\alpha = \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲\alpha = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۶}}{۶} \Rightarrow MB = \sqrt{۶} - ۱$$

$$\cos ۲\alpha = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲\alpha = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \sin^۲\alpha = \frac{۵}{۶} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{۵}}{\sqrt{۶}}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۵}} - ۱ = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۵}}{\sqrt{۵}}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۱

$$\sin\alpha = \frac{۲}{۳}\sin\beta \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{۲}{۳}\frac{MN}{BM} \quad AM = \frac{۲}{۳}MN \Rightarrow AM = \frac{۲}{۳}(\frac{\sqrt{۳}}{۳}NC) \Rightarrow AM = \frac{۲\sqrt{۳}}{۹}NC \Rightarrow \frac{NC}{AM} = \frac{۹}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \frac{NC}{AM} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۲

$$AB = (۱ - \cos\frac{\pi}{۱۲})(۱ - \cos\frac{۵\pi}{۱۲})(۱ + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})(۱ + \cos\frac{\pi}{۱۲})$$

$$AB = (۱ - \cos\frac{\pi}{۱۲})(۱ + \cos\frac{\pi}{۱۲})(۱ - \cos\frac{۵\pi}{۱۲})(۱ + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})$$

$$AB = (۱ - \cos^۲\frac{\pi}{۱۲})(۱ - \cos^۲\frac{۵\pi}{۱۲})$$

$$AB = \sin^۲\frac{\pi}{۱۲}\sin^۲\frac{۵\pi}{۱۲}$$

$$AB = \sin^۲\frac{\pi}{۱۲}\cos^۲\frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow AB = \frac{۱}{۴}(۲\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲})^۲ \Rightarrow AB = \frac{۱}{۴}(\sin^۲\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۱۶}$$

$\frac{\pi}{۱۲}$ ، $\frac{۵\pi}{۱۲}$ متمم هستند، پس:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۳ $y = a - b\sin\frac{۲\pi}{b}x$

با توجه به ضابطه داده شده داریم:

$$\begin{cases} max = a + |b| \\ min = a - |b| \\ T = \frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{|b|}} = |b| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |b| = ۲(a+|b|) - ۷ \\ |b| = ۳(a-|b|) + ۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a + |b| = ۷ \\ ۳a - ۴|b| = -۶ \end{cases} \Rightarrow ۱۱a = ۲۲ \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ |b| = ۳ \end{cases} \Rightarrow |ab| = ۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۴ ابتدا تابع را تا حد امکان ساده می‌کنیم:

$$y = ۲\cos^۲ x - ۱ - ۲\cos^۴ x = ۲\cos^۲ x(۱ - \cos^۲ x) - ۱ = ۲\sin^۲ x\cos^۲ x - ۱ = \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x - ۱$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{|۲|} = \frac{\pi}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۵ تابع را ساده می‌کنیم: $f(x) = ۳ - \frac{۲}{۴a}\sin^۲ ۲ax$

با توجه به علامت a داریم: $(۰ \le \sin^۲ ۲ax \le ۱)$

$$a > ۰ \begin{cases} max = ۳ \\ min = ۳ - \frac{۲}{۴a} \end{cases} \qquad a < ۰ \begin{cases} min = ۳ \\ max = ۳ - \frac{۲}{۴a} \end{cases}$$

به هر حال، $\left|۳ - \frac{۲}{۴a} - ۳\right| = ۱$، پس $\left|\frac{۱}{۲a}\right| = ۱$ یعنی $|a| = \frac{۱}{۲}$، از طرفی:

$$T_f = \frac{\pi}{|۲a|} \Rightarrow T = \pi$$

حال اگر دوره تناوب $f(ax)$ را بخواهیم:

$$T = \frac{T_f}{|a|} = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow T = ۲\pi$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۶

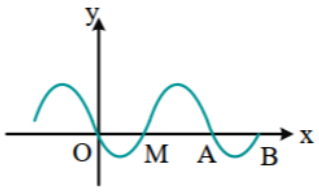
$$\begin{matrix} max = ۳ \Rightarrow a + ۴|b| = ۳ \\ min = -۱ \Rightarrow a - ۴|b| = -۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ |b| = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

از طرفی، $f(۰) = ۰$، پس:

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow a - ۴b \times \frac{۱}{۲} = ۰ \Rightarrow a = ۲b \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$$

$$f(x) = ۱ - ۲\cos(۲x - \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow f(x) = ۰$$

$$\cos(۲x - \frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{نقطه‌ی O} \\ x = \frac{\pi}{۳} & \text{نقطه‌ی M} \end{cases}$$



با توجه به دوره تناوب، $OM = AB$، پس: $OM = AB = \frac{\pi}{۳}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۷ با توجه به اتحاد $\sin^۲ x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$ داریم:

$$T = \frac{\pi}{|b|} = \frac{۵\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow |b| = ۱ \qquad y = c - a\left(\frac{۱-\cos(۲bx - \frac{\pi}{۲})}{۲}\right) \qquad y = c - \frac{a}{۲} + \frac{a}{۲}\sin ۲bx$$

تابع در همسایگی مبدأ صعودی اکید است، پس $ab > ۰$، لذا فرض می‌کنیم $a, b > ۰$. (حالت $a, b < ۰$ نیز به نتیجهٔ مشابهی در نهایت، منجر می‌شود.)

$$max = c - \frac{a}{۲} + \left|\frac{a}{۲}\right| = ۱ \xrightarrow{a>۰} c = ۱$$

$$min = c - \frac{a}{۲} - \left|\frac{a}{۲}\right| = -۲ \xrightarrow{a>۰} c - a = -۲ \Rightarrow a = ۳$$

پس:

$$f(x) = ۱ - \frac{۳}{۲} + \frac{۳}{۲}\sin ۲x \Rightarrow f(x) = \frac{-۱}{۲} + \frac{۳}{۲}\sin ۲x$$

$$\Rightarrow c + \frac{a}{b} = ۱ + \frac{۳}{۱} = ۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۸ چون نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس:

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ = a + \frac{۴}{b}\cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow a + \frac{۲}{b} = ۰$$

از طرفی:

$$T = \pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = ۲$$

$$\begin{cases} b = ۲ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow f(x) = -۱ + ۲\cos(۲x + \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow f(\frac{\pi}{۲}) = -۱ + ۲\times(-\frac{۱}{۲}) = -۲ \\ b = -۲ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow f(x) = ۱ - ۲\cos(-۲x + \frac{\pi}{۳}) \Rightarrow f(\frac{\pi}{۲}) = ۱ + ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۲ \end{cases}$$

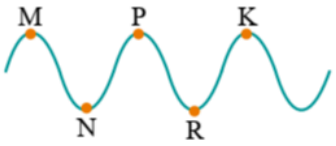
پس $f(\frac{\pi}{۲})$ یا ۲ است یا اینکه ۲-.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۹ اگر به نمودار تابع دقت کنیم بی‌شمار max و بی‌شمار min دارد، وقتی قرار است خطی که max را به min وصل می‌کند دارای حداقل مقدار شیب باشد، این دو نقطه، متوالی باشند. به شکل زیر دقت کنید:

$m_{NP} > ۰$ $m_{NK} > ۰$

$m_{MN} < ۰$ $m_{MR} < ۰$



یعنی شیب خطی که M را به N وصل می‌کند، از تمام شیب خطها کم‌تر است. لذا:

$$m_{MN} = -\frac{max - min}{\frac{T}{۲}} \Rightarrow m_{MN} = -\frac{۶-(-۲)}{\frac{۲\pi}{۲}} = \frac{-۱۶}{\pi}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۰ با توجه به آن‌که تابع در یک بازه تعریف شده، نزولی اکید است، پس: $a < 0$، از طرفی:

تابع $\tan x$ در $x = -\frac{\pi}{2}$ به $-\infty$ می‌رود. پس:

$$ax - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow ax = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow x_B = \frac{-\pi}{6a}$$

برای x_A نیز، نیاز به نقطه‌ای داریم که $f(x) = 0$ شود، پس:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \tan(ax - \frac{\pi}{3}) = -1$$

$$\Rightarrow ax - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow ax = \frac{\pi}{12} \Rightarrow x_A = \frac{\pi}{12a}$$

$$x_B - x_A = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{-\pi}{6a} - \frac{\pi}{12a} = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{-3\pi}{12a} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{-9}{12a} = 1 \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۱

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\alpha \Rightarrow 72 = \frac{1}{2} \times 10 \times 18 \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{5}$$

برای α دو جواب مکمل هم وجود دارد:

$$\cos B = \cos(\pi - \alpha - \alpha) = -\cos 2\alpha = -\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = -\left(\frac{9}{25} - \frac{16}{25}\right) = 0/28$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۲

$$\frac{\sin x + \cos 2x}{\sin x \cos 2x} = 0 \Rightarrow \sin x + \cos 2x = 0$$

به شرطی که مخرج صفر نباشد.

$$\sin x = -\cos 2x \Rightarrow \sin x = \sin(\frac{3\pi}{2} + 2x)$$

۱) $\frac{3\pi}{2} + 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{3\pi}{2}$ (۱)

برای حالت (۱) با توجه به بازه داده شده $x = \frac{\pi}{2}$، یکی از ریشه‌هاست.

۲) $\frac{3\pi}{2} + 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$ (۲)

برای حالت (۲) اگر $k = 0$، آن‌گاه $x = -\frac{\pi}{6}$ و اگر $k = 1$، آن‌گاه $x = \frac{\pi}{2}$، پس ریشه‌های معادله در بازهٔ مذکور برابر $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $\beta = -\frac{\pi}{6}$ هستند

$\tan(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

تذکر: دقت شود که هیچ‌کدام از ریشه‌های پیدا شده، مخرج کسر را صفر نمی‌کنند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۳

$$\sin(x-\frac{\pi}{۴})=\sin(x+\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۲})=-\cos(x+\frac{\pi}{۴})\Rightarrow -۲\cos(x+\frac{\pi}{۴}).\tan(x+\frac{\pi}{۴})=۱$$

$$\Rightarrow -۲\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=-\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۱۲}\Rightarrow x=\{...,-\frac{۲۹\pi}{۱۲},-\frac{۵\pi}{۱۲},\frac{۱۹\pi}{۱۲},...\} \\ x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi+\frac{\pi}{۶}\Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۱۱\pi}{۱۲}\Rightarrow x=\{...,-\frac{۱۳\pi}{۱۲},\frac{۱۱\pi}{۱۲},\frac{۳۵\pi}{۱۲},...\}\end{cases}$$

۱) $\frac{۱۱\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}=\frac{۴\pi}{۳}$

۲) $\frac{۱۹\pi}{۱۲}-\frac{۱۱\pi}{۱۲}=\frac{۸\pi}{۱۲}=\frac{۲\pi}{۳}$



جواب‌ها را روی دایره نمایش دهیم، نتیجه‌گیری راحت‌تر است.

چون $\frac{۲\pi}{۳}<\frac{۴\pi}{۳}$، پس بیشترین اختلاف بین دو ریشه متوالی $\frac{۴\pi}{۳}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۴

$$\sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}\Rightarrow \sin^۲(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{۱-\cos(۲x+\frac{\pi}{۲})}{۲}=\frac{۱+\sin ۲x}{۲}\Rightarrow \frac{۱+\sin ۲x}{۲}=\sin ۲x\Rightarrow \sin ۲x=۱$$

$$\Rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\quad k\in\mathbb{Z}$$

k	۰	۱	−۱	۲	−۲
x	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{-۳\pi}{۴}$	$\frac{۹\pi}{۴}$	$\frac{-۷\pi}{۴}$

قرار است در بازه $(-\alpha,\alpha)$ سه ریشه داشته باشد، پس اگر فرض کنیم $\alpha=\frac{۷\pi}{۴}$ آن‌گاه بازه مورد نظر $(-\frac{۷\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴})$ می‌شود که حداکثر مقدار ممکن است و سه ریشه، $\frac{-۳\pi}{۴}$ و $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۴}$ خواهند شد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۵

$$\tan x=۱-\cos ۲x\Rightarrow \tan x=۲\sin^۲x\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=۲\sin^۲x\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\\ ۲\sin x\cos x=۱\end{cases}$$

$$\sin x=۰\Rightarrow x=۰,\pi,۲\pi$$

$$\sin ۲x=۱\Rightarrow ۲x=\frac{\pi}{۲},\frac{۵\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}$$

یعنی معادله در بازه داده شده دارای ۵ جواب متمایز است.

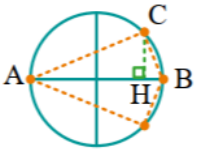
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۶

۱) $\cos(x-\frac{۳\pi}{۲})=\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\sin x$

۲) $\sin(\pi+۲x)=-\sin ۲x$

$$\Rightarrow -\sin ۲x=-\sin x\Rightarrow ۲\sin x\cos x=\sin x\Rightarrow\begin{cases}\sin x=۰\Rightarrow x=k\pi\\ \cos x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$



مساحت چهارضلعی ۲ برابر مساحت مثلث ABC است، پس:

$$S=\cancel{۲}\times(\frac{۱}{\cancel{۲}}\times \underbrace{AB}_{\text{قطر دایره}}\times \underbrace{CH}_{\sin\frac{\pi}{۳}})=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

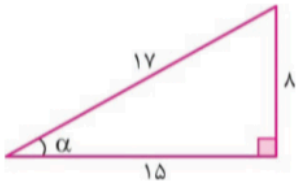
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۷ با توجه به رابطهٔ $\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$ داریم:

$$\tan\alpha = \frac{۲\tan\left(\frac{\alpha}{۲}\right)}{۱-\tan^۲\left(\frac{\alpha}{۲}\right)} = \frac{۲\left(-\frac{۱}{۴}\right)}{۱-\left(-\frac{۱}{۴}\right)^۲} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۱۶}} = \frac{-\frac{۱}{۲}}{\frac{۱۵}{۱۶}} = -\frac{۸}{۱۵}$$

از طرفی چون $\tan\left(\frac{\alpha}{۲}\right)<۰$ است و $\tan\left(\frac{\alpha}{۲}\right)=\frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$ است، پس $\sin\frac{\alpha}{۲}$ و $\cos\frac{\alpha}{۲}$ هم‌علامت نیستند، بنابراین با توجه به رابطهٔ $\sin\alpha = ۲\sin\left(\frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{۲}\right)$ نتیجه می گیریم $\sin\alpha<۰$ است.

در ضمن چون $\tan\alpha<۰$ و $\sin\alpha<۰$ است، پس $\cos\alpha>۰$ است. با توجه به این که $\tan\alpha=-\frac{۸}{۱۵}$ است، داریم:



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{۸}{۱۷} \\ \cos\alpha = \frac{۱۵}{۱۷} \end{cases}$$

پس حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{-\tan\alpha+\sin\alpha}{-۲\sin\alpha-\cos\alpha} = \frac{\frac{۸}{۱۵}-\frac{۸}{۱۷}}{-۲\left(-\frac{۸}{۱۷}\right)-\frac{۱۵}{۱۷}} = -\frac{\frac{۸\times۱۷-۸\times۱۵}{۱۷\times۱۵}}{\frac{۱۶-۱۵}{۱۷}} = \frac{\frac{۱۶}{۱۷\times۱۵}}{\frac{۱}{۱۷}} = \frac{۱۶}{۱۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۸ ابتدا ریشه‌های مخرج کسر $y=\frac{۲}{۱-\tan ۲x}$ را می‌یابیم:

$$۱-\tan ۲x = ۰ \Rightarrow \tan ۲x = ۱ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$$

از طرفی دامنهٔ $\tan ۲x$ برابر است با:

$$\tan ۲x = \frac{\sin ۲x}{\cos ۲x} \rightarrow \cos ۲x \neq ۰ \rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

حال چون $x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$ نمی‌تواند ریشه‌های مخرج باشد پس دامنهٔ تابع برابر است با : $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}\right\}$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۹ با توجه به رابطهٔ طلایی می‌دانیم $۱-\cos ۲x = ۲\sin^۲ x$ و $۱+\cos ۲x = ۲\cos^۲ x$ است، پس :

$$f(x) = \sqrt{\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}} = \sqrt{\frac{۲\sin^۲ x}{۲\cos^۲ x}} = \sqrt{\tan^۲ x} = |\tan x|$$

حالا می‌دانیم دورهٔ تناوب تابع $y=\tan x$ برابر π می‌باشد و دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\tan x|$ نیز برابر π می‌باشد.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۰

نکته : $\tan x \cdot Cotx = ۱$

$$\tan x Cotx = ۱ \Rightarrow \frac{a^۲ - ۱}{a} \times \frac{۲a}{۱-a} = ۱ \Rightarrow \frac{(a-۱)(a+۱)(۲a)}{a(۱-a)} = ۱ \xrightarrow{a \neq ۰,۱} -۲(a+۱) = ۱ \Rightarrow a+۱ = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۱

نکته : $\begin{cases} Cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = Sin\,\alpha \\ Cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -Sin\,\alpha \end{cases}$, $Cos(۲k\pi \pm \alpha) = Cos\,\alpha$

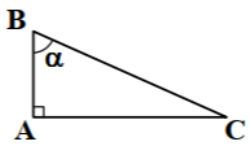
$$Cos(\frac{۳۷\pi}{۲} + \alpha) - Cos(\frac{۱۳\pi}{۲} - \alpha) = Cos(\frac{۳۶\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} + \alpha) - Cos(\frac{۱۲\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲} - \alpha)$$

$$= Cos(۱۸\pi + \frac{\pi}{۲} + \alpha) - Cos(۶\pi + \frac{\pi}{۲} - \alpha) = Cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) - Cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = -Sin\,\alpha - Sin\,\alpha = -۲\,Sin\,\alpha$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۲

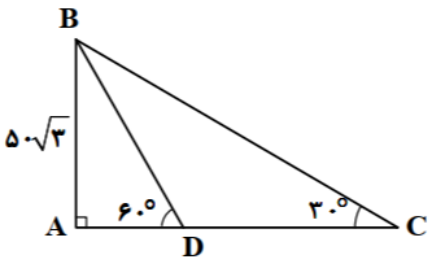
نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل روبه‌رو داریم:



$$Sin\,\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB}$$

$$Cos\,\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول وتر}} = \frac{AB}{BC} \qquad Cot\,\alpha = \frac{\text{طول ضلع مجاور}}{\text{طول ضلع مقابل}} = \frac{AB}{AC}$$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:



$$\begin{cases} \triangle ABD : \tan\hat{D} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow \tan ۶۰^\circ = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{AD} \Rightarrow AD = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{\tan ۶۰^\circ} = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = ۵۰ \\ \triangle ABC : \tan\hat{C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \tan ۳۰^\circ = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{\tan ۳۰^\circ} = \frac{۵۰\sqrt{۳}}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}} = ۱۵۰ \end{cases}$$

$$AC = AD + CD \Rightarrow ۱۵۰ = ۵۰ + CD \Rightarrow CD = ۱۰۰ \Rightarrow x = ۱۰۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۳ نکته : $\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=۱-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha$

نکته : $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

ابتدا با استفاده از مقدار جمع سینوس و کسینوس، حاصل‌ضرب آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{۱۵}}{۳}\Rightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲=\frac{۱۵}{۹}\Rightarrow\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱۵}{۹}$$

$$\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱۵}{۹}-۱\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل اول:

به محاسبهٔ مقدار خواسته‌شده می‌پردازیم:

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha=\frac{\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\frac{\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha}=\frac{\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha}{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}=\frac{۱-۲(\sin\alpha\cos\alpha)^۲}{(\sin\alpha\cos\alpha)^۲}=\frac{۱-۲\times\frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۹}}=۹\times\frac{۷}{۹}=۷$$

راه‌حل دوم: نکته: $۱+\cot^۲\alpha=\frac{۱}{\sin^۲\alpha}\ ,\ ۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

با اضافه و کم کردن عدد ۲ به عبارت خواسته‌شده، داریم:

$$\tan^۲\alpha+\cot^۲\alpha+۲-۲=۱+\tan^۲\alpha+۱+\cot^۲\alpha-۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}+\frac{۱}{\sin^۲\alpha}-۲$$

$$=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha}-۲=\frac{۱}{(\sin\alpha\cos\alpha)^۲}-۲=\frac{۱}{(\frac{۱}{۳})^۲}-۲=۹-۲=۷$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۴ نکته: مختصات نقطهٔ P، انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در دایرهٔ مثلثاتی به‌صورت $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$ است.

فرض کنیم مختصات نقطهٔ P به‌صورت $P(x,y)$ باشد، داریم: $\tan\alpha=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{y}{x}=-۳\Rightarrow y=-۳x$

ضمناً نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی به شعاع یک است، پس:

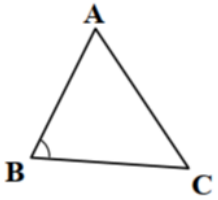
$$x^۲+y^۲=۱\Rightarrow x^۲+(-۳x)^۲=۱\Rightarrow ۱۰x^۲=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

P در ربع دوم قرار دارد، پس x عددی منفی است، یعنی:

$$x=-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}\Rightarrow y=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰}\Rightarrow P(-\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰},\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰})$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۵ نکته: در هر مثلث دلخواه با معلوم بودن طول دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}$$

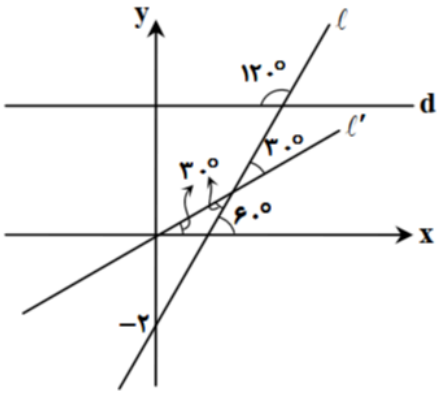
با توجه به نکته می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\times۲\times\sin۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}a\times\sqrt{۲}a\times\sin۴۵^\circ\Rightarrow\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times a^۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲}a^۲\Rightarrow a^۲=۳\Rightarrow a=\pm\sqrt{۳}$$

چون مقدار منفی برای طول ضلع قابل قبول نیست، پس: $a=\sqrt{۳}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۶ نکته: اگر خطی با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ α تشکیل دهد، شیب آن برابر $\tan\alpha$ است.



خط ℓ با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ ۶۰° تشکیل می‌دهد، پس شیب آن برابر $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$ و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$y = \sqrt{۳}x - ۲$ (توجه کنید که عرض از مبدأ خط ℓ، برابر -۲ است.)

به همین ترتیب طبق شکل، شیب خط ℓ' برابر $\tan ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و معادلهٔ آن به‌صورت $y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x$ است. اکنون می‌توان با حل دستگاه $\begin{cases} y = \sqrt{۳}x - ۲ \\ y = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x \end{cases}$، مختصات نقطهٔ تقاطع دو خط ℓ و ℓ' را تعیین کرد:

$$\sqrt{۳}x - ۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}x \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}x = ۲ \Rightarrow x = \sqrt{۳} \Rightarrow y = ۱$$

پس مختصات نقطهٔ تقاطع به‌صورت $(\sqrt{۳}, ۱)$ است. بنابراین مجموع طول و عرض این نقطه برابر است با: $x + y = \sqrt{۳} + ۱$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۷ **پله اول:** می‌دانیم که $\cos(۱۰۵^\circ) = \cos(۹۰^\circ + ۱۵^\circ) = -\sin ۱۵^\circ$ و $\cos(۱۶۵^\circ) = \cos(۹۰^\circ + ۷۵^\circ) = -\sin ۷۵^\circ$ در نتیجه میانگین برابر است با:

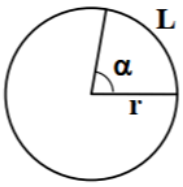
$$\bar{X} = \frac{\sin ۱۵^\circ + \sin ۷۵^\circ + \cos ۹۰^\circ + (-\sin ۱۵^\circ) + (-\sin ۷۵^\circ)}{۵} = ۰$$

پله دوم: واریانس داده‌ها برابر است با:

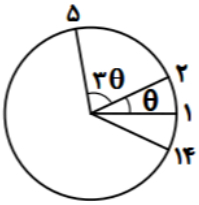
$$\sigma^۲ = \frac{\sin^۲ ۱۵^\circ + \sin^۲ ۷۵^\circ + ۰ + \sin^۲ ۱۵^\circ + \sin^۲ ۷۵^\circ}{۵} \xrightarrow{\sin^۲ ۷۵^\circ = \cos^۲ ۱۵^\circ} \sigma^۲ = \frac{۲(\sin^۲ ۱۵^\circ + \cos^۲ ۱۵^\circ)}{۵} = \frac{۲}{۵} = ۰/۴$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۸ نکته: اگر L طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در دایره‌ای به شعاع r باشد و α برحسب رادیان باشد، آنگاه:



$$\alpha = \frac{L}{r}$$



کل کمان چرخ و فلک ۲π رادیان است. چرخ و فلک ۱۴ کابین دارد، پس زاویهٔ بین هر دو کابین متوالی برابر است با: $\theta = \frac{۲\pi}{۱۴} = \frac{\pi}{۷}$

پس زاویهٔ بین دو کابین ۲ و ۵ برابر $\alpha = ۳\theta$ یعنی $\frac{۳\pi}{۷}$ است؛ بنابراین طول کمان بین کابین ۲ و ۵ برابر است با:

$$L = r \cdot \alpha \Rightarrow L = ۳۵ \times \frac{۳\pi}{۷} = ۱۵\pi$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۹ نکته: اگر دو زاویهٔ حادهٔ α و β چنان باشند که $\tan\alpha = \mathrm{Cot}\,\beta$، آنگاه: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$

از $\tan(x + \frac{\pi}{۱۸}) = \mathrm{Cot}(x + \frac{۲\pi}{۹})$ نتیجه می‌شود:

$$x + \frac{\pi}{۱۸} + x + \frac{۲\pi}{۹} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۲x = \frac{۹\pi - \pi - ۴\pi}{۱۸} = \frac{۴\pi}{۱۸} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۱۸} = \frac{\pi}{۹}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

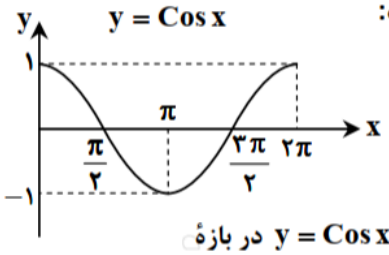
۲۶۰ نکته: $\text{Sin}(\pi+\alpha)=-\text{Sin}\,\alpha$ ، $\text{Cos}(\pi-\alpha)=-\text{Cos}\,\alpha$ ، $\text{Cos}(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\text{Sin}\,\alpha$ ، $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\text{Cos}\,\alpha$

زوایای داده‌شده را برحسب زاویهٔ ۲۰° بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\text{Sin}\,۲۰۰^\circ+\text{Cos}\,۱۶۰^\circ}{\text{Sin}\,۱۱۰^\circ+\text{Cos}\,۷۰^\circ}=\frac{\text{Sin}(۱۸۰^\circ+۲۰^\circ)+\text{Cos}(۱۸۰^\circ-۲۰^\circ)}{\text{Sin}(۹۰^\circ+۲۰^\circ)+\text{Cos}(۹۰^\circ-۲۰^\circ)}=\frac{-\text{Sin}\,۲۰^\circ-\text{Cos}\,۲۰^\circ}{\text{Cos}\,۲۰^\circ+\text{Sin}\,۲۰^\circ}=\frac{-(\text{Sin}\,۲۰^\circ+\text{Cos}\,۲۰^\circ)}{\text{Sin}\,۲۰^\circ+\text{Cos}\,۲۰^\circ}=-۱$$

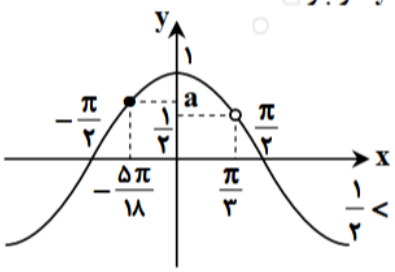
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۱ نکته: نمودار تابع $y=\text{Cos}\,x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ مطابق شکل زیر است:



می‌دانیم: $۶۰^\circ=\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $-۵۰^\circ=-\frac{۵\pi}{۱۸}$ رادیان

از طرفی $\text{Cos}\,۶۰^\circ<\text{Cos}\,۵۰^\circ=\text{Cos}(-۵۰^\circ)$، بنابراین با رسم نمودار $y=\text{Cos}\,x$ در بازهٔ $\left[-\frac{۵\pi}{۱۸},\frac{\pi}{۳}\right]$، می‌توان محدودهٔ $\text{Cos}\,x$ را به‌دست آورد:



با توجه به شکل در این بازه، $\frac{۱}{۲}<\text{Cos}\,x\le ۱$ می‌باشد. پس داریم:

$$\frac{۱}{۲}<\frac{m-۱}{۳}\le ۱\Rightarrow \frac{۳}{۲}<m-۱\le ۳\Rightarrow ۲/۵<m\le ۴\Rightarrow m\in(۲/۵,۴]$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۲ طول کمان AB برابر ℓ و طول کمان $A'B'$ برابر ℓ' است.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\frac{\ell}{۳}\Rightarrow \ell=۳\alpha\\ \alpha+۱=\frac{\ell'}{۴}\Rightarrow \ell'=۴\alpha+۴\end{array}\right\}\Rightarrow \ell'-\ell=\alpha+۴=۴/۲\Rightarrow \alpha=۰/۲\ (\text{rad})$$

بنابراین:

$$\alpha=(۰/۲\times\frac{۱۸۰}{\pi})^\circ=(\frac{۳۶}{\pi})^\circ$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۳ با توجه به نمودار $\frac{۱}{۴}$ دورهٔ تناوب برابر $\frac{\pi}{۸}$ و در نتیجه دورهٔ تناوب برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

$$T=\frac{۲\pi}{a^۲}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow\begin{cases}a=۲ & \text{غ ق ق}\\ a=-۲ & \checkmark\end{cases}$$

تابع در $x=۰$ نزولی بوده و در نتیجه ضریب سینوس باید منفی باشد، بنابراین $a=-۲$ قابل قبول است.

مقدار مینیمم تابع برابر ۱ است. خواهیم داشت:

$$\min=-|a|+b=۱\Rightarrow -۲+b=۱\Rightarrow b=۳$$

بنابراین:

$$f(x)=-۲\sin ۴x+۳$$

$$f(\frac{\pi}{۲b+a})=f(\frac{\pi}{۴})=-۲\sin\pi+۳=۳$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۴ عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin ۱۴۰^\circ+\cos ۳۱۰^\circ}{\sin ۲۳۰^\circ-\cos ۴۹۰^\circ}=\frac{\sin(۱۸۰^\circ-۴۰^\circ)+\cos(۲۷۰^\circ+۴۰^\circ)}{\sin(۲۷۰^\circ-۴۰^\circ)-\cos(۴۵۰^\circ+۴۰^\circ)}=\frac{\sin ۴۰^\circ+\sin ۴۰^\circ}{-\cos ۴۰^\circ+\sin ۴۰^\circ}=\frac{۲\sin ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ}$$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos ۴۰^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۲\sin ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}}{\frac{\sin ۴۰^\circ-\cos ۴۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ}}=\frac{۲\tan ۴۰^\circ}{\tan ۴۰^\circ-۱}=-۱۰/۵\Rightarrow ۱۲/۵\tan ۴۰^\circ=۱۰/۵\Rightarrow \tan ۴۰^\circ=\frac{۱۰/۵}{۱۲/۵}=\frac{۱۰۵}{۱۲۵}=\frac{۲۱}{۲۵}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\sin ۱۴۰^\circ+\cos ۳۱۰^\circ}{\sin ۲۳۰^\circ+\cos ۴۹۰^\circ}=\frac{۲\tan ۴۰^\circ}{\tan ۴۰^\circ+۱}=\frac{\frac{۴۲}{۲۵}}{\frac{۲۱}{۲۵}+۱}=\frac{\frac{۴۲}{۲۵}}{\frac{۴۶}{۲۵}}=\frac{۴۲}{۴۶}=\frac{۲۱}{۲۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۵ دورهٔ تناوب $y=|a\sin(۶x+b)|$ برابر $T=\frac{\pi}{۶}$ است.

فاصلهٔ طولی بین یک ماکزیمم و یک مینیمم متوالی در نمودار مثلثاتی نصف دورهٔ تناوب است.

اگر $x=\frac{۵\pi}{۱۲}$ طول نقطهٔ ماکزیمم تابع باشد، $x=\frac{۵\pi}{۱۲}\pm\frac{\pi}{۱۲}$ طول نقاط مینیمم می‌باشند.

$$\begin{cases} x_۱=\frac{۵\pi}{۱۲}+\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۲} \\ x_۲=\frac{۵\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۶ توجه کنید که:

$$\sin(\frac{۵۳\pi}{۱۲})=\sin(\frac{۴۸\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲})=\sin(۴\pi+\frac{۵\pi}{۱۲})$$

$$=\sin\frac{۵\pi}{۱۲}=\sin(\frac{۶\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۱۲})=\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۲})=\cos\frac{\pi}{۱۲}$$

از طرف دیگر:

$$\cos\frac{\pi}{۶}=۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}-۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}-۱\Rightarrow\cos^۲\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

بنابراین:

$$\sin\frac{۵۳\pi}{۱۲}=\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۷ ابتدا توجه کنید که:

$$f(x)=۰ \Rightarrow ۲\sin(\frac{\pi x}{a}+\frac{\pi}{۶})-۱=۰ \Rightarrow \sin(\frac{\pi x}{a}+\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}$$

$$\begin{cases}\frac{\pi x}{a}+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ \frac{\pi x}{a}+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۲ka\\ x=۲ka+\frac{۲a}{۳}\end{cases},\ k\in\mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های معادله مطابق جدول زیر هستند:

k	...	−۱	۰	۱	...
۲ka		−۲a	۰	۲a	
$۲ka+\frac{۲a}{۳}$		$-\frac{۴a}{۳}$	$\frac{۲a}{۳}$	$\frac{۸a}{۳}$	

با توجه به گزینه‌ها معلوم است که a مقداری مثبت است و $x=۲$ کوچک‌ترین جواب مثبت معادلهٔ $f(x)=۰$ است، بنابراین:

$$\frac{۲a}{۳}=۲ \Rightarrow a=۳$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۸ توجه کنید که:

$$f(x)=\cos^۲x+\sin^۴x=۱-\sin^۲x+\sin^۴x=۱-\sin^۲x(۱-\sin^۲x)$$

$$=۱-\sin^۲x\cos^۲x=۱-(\sin x\cos x)^۲=۱-(\frac{۱}{۲}\sin ۲x)^۲=۱-\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲x=۱-\frac{۱}{۴}(\frac{۱-\cos ۴x}{۲})=\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۸}\cos ۴x$$

بنابراین بیشترین مقدار تابع f برابر است با:

$$\frac{۷}{۸}+\frac{۱}{۸}=۱$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۶۹ زاویه ای که درهر ساعت توسط نوک عقربهٔ ساعت‌شمار طی می‌شود برابر $\frac{۲\pi}{۱۲}=\frac{\pi}{۶}$ است، پس هنگامی که ساعت از ۷ به ۲ می‌رود، نوک عقربه ساعت‌شمار $۷\times\frac{\pi}{۶}=\frac{۷\pi}{۶}$ حرکت می‌کند. هنگامی که عقربه دقیقه‌شمار ۲۰ دقیقه جلو می‌رود، ساعت‌شمار نیز $\frac{۲۰}{۶۰}\times\frac{\pi}{۶}=\frac{\pi}{۱۸}$ جلو می روند. پس عقربه ساعت‌شمار در مجموع $\frac{\pi}{۱۸}+\frac{۷\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۹}$ جلو می‌رود.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۰ با توجه به صورت سوال داریم:

$$\overset{\frown}{BMC}=۲۵\overset{\frown}{AB}$$

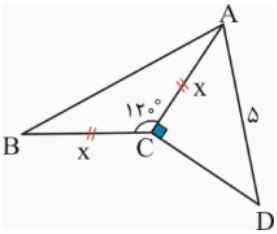
در ضمن می‌دانیم در هر دایره به شعاع R، اگر L طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ مرکزی θ باشد، آن گاه طول کمان از رابطهٔ $L=R\theta$ به دست می‌آید: پس:

$$R\left(\frac{۳\pi}{۲}-۲\theta\right)=۲۵R\theta \Rightarrow \frac{۳\pi}{۲}-۲\theta=۲۵\theta \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{۱۸}$$

پس: متمم زاویهٔ θ برابر است با: $\frac{\pi}{۲}-\theta=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۱۸}=\frac{۸\pi}{۱۸}=۸۰^\circ$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۱ **پله اول:** می‌دانیم $S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times AC\times BC\times \sin ۱۲۰^\circ$ است و فرض می‌کنیم $AC=BC=x$ است، پس:



$$S_{\triangle ABC}=\frac{۱}{۲}\times x\times x\times \sin ۱۲۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times x^۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲$$

$$S_{\triangle ABC}=۴\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲=۴\sqrt{۳}\Rightarrow x=۴$$

پله دوم: با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ACD داریم:

$$AD^۲=AC^۲+CD^۲\Rightarrow CD^۲=۵^۲-۴^۲=۹\Rightarrow CD=۳$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD}=\frac{۱}{۲}\times AC\times CD\times \sin ۹۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳\times ۱=۶$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۲ **پله اول:** چون حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-(m+۳)x-۲m+۹=۰$ برابر $P=x_۱x_۲=-۲m+۹$ است، پس:

$$-۲m+۹=(\tan\alpha)(\cot\alpha)\Rightarrow -۲m+۹=۱\Rightarrow m=۴$$

پله دوم: حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S=-\frac{-(m+۳)}{۱}=m+۳=۷$ است، پس $\tan\alpha+\cot\alpha=۷$ می‌باشد و داریم:

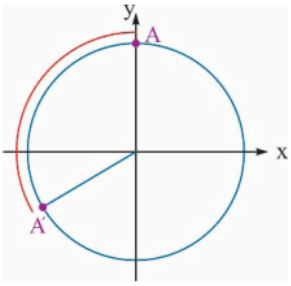
$$\frac{۱}{\tan\alpha}+\frac{۱}{\cot\alpha}=\cot\alpha+\tan\alpha=۷$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۳ ابتدا زاویه $\frac{۱۴\pi}{۳}$ را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱۴\pi}{۳}=۴\pi+\frac{۲\pi}{۳}$$

حالا برای این‌که نقطه $A(۰,۱)$ را به اندازه $\frac{۱۴\pi}{۳}$ در جهت مثلثاتی دوران دهیم، باید ابتدا ۴π یعنی ۲ دور کامل در جهت مثلثاتی دوران کنیم که در این صورت به مکان اولیه A یعنی $(۰,۱)$ می‌رسیم. سپس $\frac{۲\pi}{۳}$ دیگر در جهت مثلثاتی حرکت کنیم، پس با فرض $A'(x,y)$ داریم:



$$\begin{cases} x=\cos(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\cos\frac{\pi}{۶}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ y=\sin(\pi+\frac{\pi}{۶})=-\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پس $A'(-\frac{\sqrt{۳}}{۲},-\frac{۱}{۲})$ است. بنابراین AA' برابر است با:

$$AA'=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۰\right)^۲+\left(-\frac{۱}{۲}-۱\right)^۲}=\sqrt{\frac{۳}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\sqrt{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۴ **پله اول:** به جای $\tan x$ می‌نویسیم $\frac{\sin x}{\cos x}$ و به جای $\cot x$ می‌نویسیم $\frac{\cos x}{\sin x}$ و حاصل کسر $\frac{۱+\tan x}{\cot x}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۱+\tan x}{\cot x}=\frac{۱+\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{\sin x(\cos x+\sin x)}{\cos^۲ x}$$

پله دوم: حالا با توجه به تساوی $\frac{۱+\tan x}{\cot x}\times\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}=۲$ داریم:

$$\frac{\sin x(\cos x+\sin x)}{\cos^۲ x}\times\frac{\sin x-\cos x}{\sin x}=۲\Rightarrow\frac{\sin^۲ x-\cos^۲ x}{\cos^۲ x}=۲$$

$$\Rightarrow(۱-\cos^۲ x)-\cos^۲ x=۲\cos^۲ x\Rightarrow ۴\cos^۲ x=۱\Rightarrow\cos^۲ x=\frac{۱}{۴}$$

پله سوم: با توجه به رابطهٔ $\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱$ داریم:

$$\sin^۲ x=۱-\cos^۲ x=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{\frac{\pi}{۲}<x<\pi}\sin x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-x\right)=\sin x+\sin x=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sqrt{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۵ از تساوی $\tan x-۲\cot x=۱$ داریم:

$$\tan x-\frac{۲}{\tan x}=۱\Rightarrow\tan^۲ x-\tan x-۲=۰\xrightarrow{a+c=b}\begin{cases}\tan x=-۱\\ \tan x=۲\end{cases}$$

چون $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ پس $\tan x=۲$ است. سایر نسبت‌های زاویه x را پیدا می‌کنیم:

$$۱+\tan^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}\Rightarrow ۱+۲^۲=\frac{۱}{\cos^۲ x}\Rightarrow\cos^۲ x=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{\sin^۲ x+\cos^۲ x=۱}\sin^۲ x=\frac{۴}{۵}\Rightarrow\sin x=\frac{۲}{\sqrt{۵}},\cos x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

حالا هر یک از نسبت‌های مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

$$۱)\ \sin(\frac{۹\pi}{۲}+x)=\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۲}+x)=\overbrace{\sin(\frac{\pi}{۲}+x)}^{\text{ربع دوم}}=+\cos x$$

$$۲)\ \cos(\frac{۷\pi}{۲}-x)=\cos(۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}-x)=\overbrace{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-x)}^{\text{ربع سوم}}=-\sin x$$

$$۳)\ \tan(x-\frac{۳\pi}{۲})=-\tan(\overbrace{\frac{۳\pi}{۲}-x}^{\text{ربع سوم}})=-(+\cot x)=-\cot x$$

پس حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$(\cos x)(-\sin x)+\cot x=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\times(-\frac{۲}{\sqrt{۵}})+\frac{۱}{۲}=\frac{-۲}{۵}+\frac{۱}{۲}=\frac{-۴+۵}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

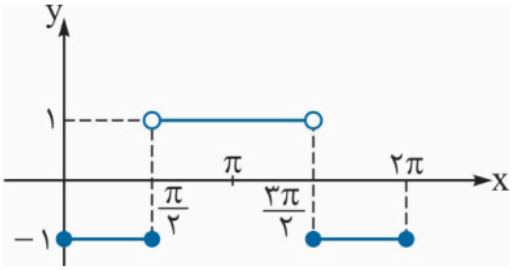
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۶

پله اول: می‌دانیم در بازه‌هـــای $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$ رابطهٔ $\cos x \ge 0$ برقرار و در بازهٔ $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ رابطهٔ $\cos x < 0$ برقرار است، پس:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ;\cos x < 0 \\ -1 & ;\cos x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ;\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ -1 & ;0 \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases}$$

پله دوم: حالا نمودار را رسم می‌کنیم :



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۷

پله اول: مینیمم تابع روی محور yها، قرار دارد پس $b < 0$ اســـت و در نتیجه $a - b = 6$ اســـت. در ضمن چون نمودار از نقطهٔ $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$ می‌گذرد پس:

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 4 \Rightarrow a + \left(\frac{-b}{2}\right) = 4 \Rightarrow b = -4, a = 2$$

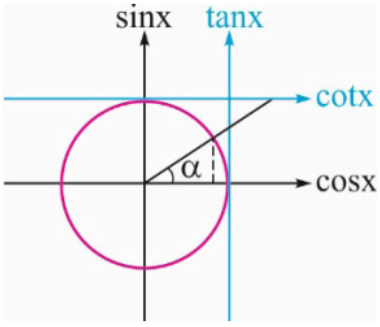
پله دوم: ماکزیمم تابع به ازای $x = 1$ به دست می‌آید و چون ۱ وسط $\frac{2}{3}$ و α است پس:

$$\frac{\alpha + \frac{2}{3}}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3} \qquad f\left(\frac{-3}{4}\alpha\right) = f(-1) = 2 - 4\cos(-\pi) = 6$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۸

سرنخ با تعیین ریشه‌های صورت و مخرج کسر و تشخیص بزرگ و کوچک بودن ریشه‌ها عبارت‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.



پله اول: در صورت کسر به جای عدد ۱ می‌نویسم $\tan\alpha.\cot\alpha$ و داریم:

$$P(x) = \frac{x^2 - (\tan\alpha + \cot\alpha)x + \tan\alpha\cot\alpha}{\sin^2\alpha - x^2}$$

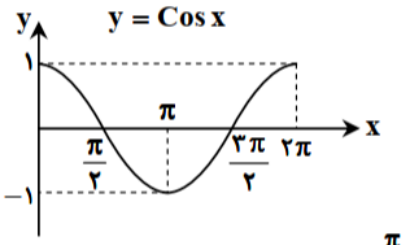
$$\Rightarrow \frac{(x - \tan\alpha)(x - \cot\alpha)}{(\sin\alpha - x)(\sin\alpha + x)} > 0 \Rightarrow$$

x	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
p(x)	− ت ن	+ ت ن	− ○	+ ○ −

پله دوم: بنابراین مجموعه جواب نامعادله به صورت بازهٔ $(-\sin\alpha, \sin\alpha) \cup (\tan\alpha, \cot\alpha)$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۹ نکته: نمودار تابع $y = \text{Cos}\, x$ در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ مطابق شکل زیر است که حداقل و حداکثر مقدار تابع -۱ و ۱ هستند.



نکته: $\text{Sin}(-x) = -\text{Sin}\, x$, $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} - x) = \text{Cos}\, x$ ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a + b\text{Sin}(x - \frac{\pi}{۲}) \Rightarrow f(x) = a - b\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow f(x) = a - b\,\text{Cos}\, x$$

تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است، بنابراین: $f(۰) = ۰$

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ = a - b\,\text{Cos}(۰) \Rightarrow a - b = ۰ \Rightarrow a = b \quad (I)$$

با توجه به تقارن شکل، تابع در نقطهٔ $x = \pi$ به مقدار حداکثر خود یعنی $y = ۴$ رسیده است، بنابراین $f(\pi) = ۴$.

$$f(\pi) = ۴ \Rightarrow ۴ = a - b\,\text{Cos}\,\pi \Rightarrow a + b = ۴ \quad (II)$$

$$(I)\,,\,(II) \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = b = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲ - ۲\text{Cos}\, x$$

$$f(\frac{۱۱\pi}{۳}) = ۲ - ۲\text{Cos}(\frac{۱۱\pi}{۳}) = ۲ - ۲\text{Cos}(۴\pi - \frac{\pi}{۳}) = ۲ - ۲\text{Cos}(\frac{\pi}{۳}) = ۲ - ۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۰ نکته: $\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \text{Cos}\,\alpha$, $\text{Cos}(\pi + \alpha) = -\text{Cos}\alpha$, $\text{Cos}(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\text{Sin}\,\alpha$, $\text{Cos}(\pi - \alpha) = -\text{Cos}\,\alpha$, $\text{Cos}(-\alpha) = \text{Cos}\,\alpha$

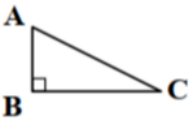
با توجه به تساوی داده‌شده داریم:

$$\frac{\text{Cos}(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + ۲\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} - \alpha)}{\text{Cos}(\alpha - \pi) + ۲\text{Cos}(\frac{\pi}{۲} + \alpha)} = -\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{\text{Cos}(\pi + (\frac{\pi}{۲} + \alpha)) + ۲\text{Sin}(\frac{\pi}{۲} - \alpha)}{\text{Cos}(-(\pi - \alpha)) + ۲\text{Cos}(\frac{\pi}{۲} + \alpha)} = -\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{-\text{Cos}(\frac{\pi}{۲} + \alpha) + ۲\text{Cos}\,\alpha}{\text{Cos}(\pi - \alpha) - ۲\text{Sin}\,\alpha} = -\frac{۱}{۵}$$

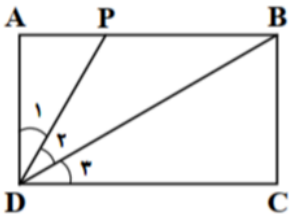
$$\Rightarrow \frac{\text{Sin}\,\alpha + ۲\text{Cos}\,\alpha}{-\text{Cos}\,\alpha - ۲\text{Sin}\,\alpha} = -\frac{۱}{۵} \Rightarrow ۵\text{Sin}\,\alpha + ۱۰\text{Cos}\,\alpha = \text{Cos}\,\alpha + ۲\text{Sin}\,\alpha \Rightarrow ۹\text{Cos}\,\alpha = -۳\text{Sin}\,\alpha \Rightarrow \frac{\text{Sin}\,\alpha}{\text{Cos}\,\alpha} = -\frac{۹}{۳} \Rightarrow \tan\alpha = -۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۱ نکته: در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{B}=۹۰^\circ)$، داریم: $\text{Sin}\,\hat{A}=\frac{BC}{AC}, \text{Cos}\,\hat{A}=\frac{AB}{AC}, \tan\hat{A}=\frac{BC}{AB}$



پاره‌خط‌های DP و DB، زاویهٔ قائمهٔ ADC را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کند، پس هریک از زاویه‌های $A\hat{D}P$، $P\hat{D}B$ و $B\hat{D}C$ برابر ۳۰° است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ PAD داریم:



$$\tan\hat{D}_۱=\frac{AP}{AD}\Rightarrow\tan۳۰^\circ=\frac{AP}{۱}\Rightarrow AP=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\text{Cos}\,\hat{D}_۱=\frac{AD}{DP}\Rightarrow\text{Cos}\,۳۰^\circ=\frac{۱}{DP}\Rightarrow DP=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\Rightarrow DP=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

همچنین در مثلث قائم‌الزاویهٔ BCD داریم:

$$\text{Sin}\,\hat{D}_۳=\frac{BC}{BD}\Rightarrow\text{Sin}\,۳۰^\circ=\frac{۱}{BD}\Rightarrow BD=\frac{۱}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow BD=۲$$

$$\tan\hat{D}_۳=\frac{BC}{CD}\Rightarrow\tan۳۰^\circ=\frac{۱}{CD}\Rightarrow CD=\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۳}}\Rightarrow CD=\sqrt{۳}$$

برای یافتن طول ضلع BP داریم:

$$BP=AB-AP=DC-AP=\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

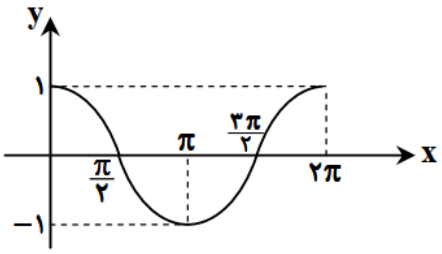
پس محیط مثلث BDP برابر است با:

$$BP+BD+DP=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}+۲+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}=۲+\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۲ نکته: $\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\text{Cos}\,x$

نکته: نمودار $y=\text{Cos}\,x$ به‌شکل زیر است:



ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم: $y=a+b\,\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}+x)=a-b\,\text{Cos}\,x$

ماکزیمم تابع برابر ۳ است، پس: $a-b(-۱)=۳\Rightarrow a+b=۳$

$a-b\,\text{Cos}(۰)=a-b=-۱$

به‌ازای $x=۰$، مقدار تابع برابر -۱ است، بنابراین:

$$\begin{cases}a+b=۳\\a-b=-۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=۲\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۳

نکته: $\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha\end{cases}$ و $\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}$

نکته: $\begin{cases}\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(2k\pi\pm\alpha)=\cos\alpha\end{cases}$ و $\begin{cases}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha\end{cases}$

با توجه به نکات، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\cos 100^\circ+\sin 350^\circ}{\cos 190^\circ-\sin 80^\circ}=\frac{\cos(90^\circ+10^\circ)+\sin(360^\circ-10^\circ)}{\cos(180^\circ+10^\circ)-\sin(90^\circ-10^\circ)}=\frac{-\sin 10^\circ-\sin 10^\circ}{-\cos 10^\circ-\cos 10^\circ}=\frac{-2\sin 10^\circ}{-2\cos 10^\circ}=\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\tan 10^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۴

نکته: $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$

نکته: $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

با توجه به نکته و فرض سؤال داریم:

$$\tan\alpha=\sqrt{m+3}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{1}{\sqrt{m+3}}$$

با جای‌گذاری در رابطهٔ $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$، داریم:

$$1+\frac{1}{m+3}=\frac{1}{\frac{3m+1}{3m-1}}\Rightarrow\frac{m+4}{m+3}=\frac{3m-1}{3m+1}\Rightarrow 3m^2+12m+m+4=3m^2+9m-m-3\Rightarrow 5m=-7\Rightarrow m=-\frac{7}{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۵

ابتدا $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

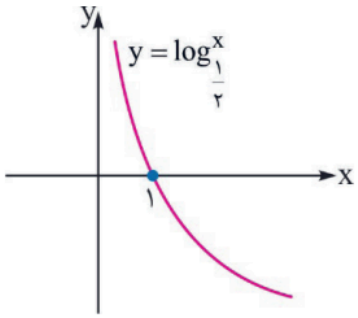
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\pi}{3x-1}=\frac{\pi}{2^+}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

حالا به سراغ محاسبه $\lim\limits_{x\to 1^+} g(f(x))$ می‌رویم:

$$\lim_{x\to 1^+} g(f(x))=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\log_{\frac{1}{2}}\tan x\right)$$

در ضمن می دانیم وقتی که $x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ آنگاه $\tan x\to+\infty$ ، پس:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\log_{\frac{1}{2}}\tan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)$$



حالا با توجه به نمودار $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ داریم:

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)=-\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۶ می‌دانیم $\cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x$ است، بنابراین داریم:

$$\sin^۲ x + \sin^۲ ۲x = \cos^۲ x + \cos^۲ ۲x$$
$$\sin^۲ x - \cos^۲ x = \cos^۲ ۲x - \sin^۲ ۲x \qquad -\cos ۲x = \cos ۴x \Rightarrow \cos ۴x = \cos(\pi - ۲x)$$

$$۴x = ۲k\pi \pm (\pi - ۲x) \rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + \pi - ۲x \\ ۴x = ۲k\pi - \pi + ۲x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۶x = (۲k+۱)\pi \rightarrow x = \left(\frac{۲k+۱}{۶}\right)\pi \xrightarrow{x\in(۰,\pi)} x = \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶} \\ ۲x = (۲k-۱)\pi \rightarrow x = \left(\frac{۲k-۱}{۲}\right)\pi \xrightarrow{x\in(۰,\pi)} x = \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

بنابراین این معادله دارای سه جواب $\left\{\frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۶}\right\}$ است و مجموع جواب‌ها برابر است با:

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{۶} + \frac{\pi}{۲} + \frac{۵\pi}{۶} = \frac{۳\pi}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۷ می‌دانیم اگر $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$ باشد، آنگاه $\sin\alpha = \cos\beta$ است.

بنابراین:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{۸}\right) = \cos\left(\frac{۵\pi}{۸} - x\right) \qquad \sin^۲\left(x - \frac{\pi}{۸}\right) + ۲\cos\left(\frac{۵\pi}{۸} - x\right) = ۳ \rightarrow \sin^۲\left(x - \frac{\pi}{۸}\right) + ۲\sin\left(x - \frac{\pi}{۸}\right) - ۳ = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{۸}\right) = -۳ \text{ غ ق ق} \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{۸}\right) = ۱ \rightarrow x - \frac{\pi}{۸} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۸} \rightarrow -۲\pi + \frac{۵\pi}{۸}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بزرگ ترین جواب منفی: $x = \frac{-۱۱\pi}{۸}$ کوچک ترین جواب مثبت: $x = \frac{۵\pi}{۸}$

$$\frac{\text{کوچک ترین جواب مثبت}}{\text{بزرگ ترین جواب منفی}} = \frac{۵\frac{\pi}{۸}}{-۱۱\frac{\pi}{۸}} = \frac{-۵}{۱۱}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۸ با توجه به نمودار بیشترین و کمترین مقدار تابع به ترتیب برابر a و -a است. بنابراین:

$$f(x) = c + ۳\cos\left(\frac{\pi}{۲} - \pi bx\right) = c + ۳\sin(\pi bx) \qquad c = \frac{\max + \min}{۲} = \frac{a - a}{۲} = ۰ \rightarrow c = ۰$$

با توجه به نمودار $۱۰\frac{T}{۴} = \frac{۵}{۲}$ است، پس $T = ۱$.

$$T = \frac{۲\pi}{|\pi b|} = ۱ \rightarrow |\pi b| = ۲\pi \rightarrow |b| = ۲ \xrightarrow{\text{نمودار در مبدا نزولی}} b = -۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x) = ۳\sin(-۲\pi x)$ می‌باشد که بیشترین مقدار آن برابر $a = ۳$ است. پس: $ab = ۳(-۲) = -۶$

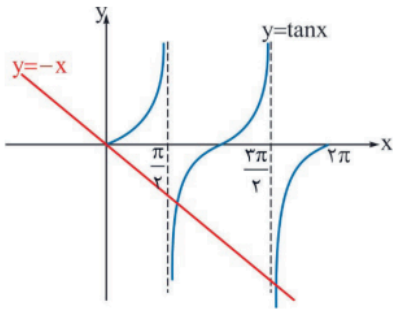
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۹

$$\sin x + x\cos x = 0 \rightarrow \sin x = -x\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -x$$

حال معادله را به روش هندسی بررسی می‌کنیم:

با توجه به نمودار مشخص است که معادله $\tan x = -x$ در بازهٔ $[0,2\pi]$ دارای ۳ جواب است.



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۰

برای اینکه نمودار تابع $f(x)$ از ناحیه اول عبور نکند باید تابعی نامثبت باشد بنابراین باید $\max(f(x)) \le 0$ باشد.

$$f(x) = [a]^2 \sin 2x - 3[a] + 2 \xrightarrow{\sin 2x = 1} \max(f(x)) = [a]^2 - 3[a] + 2$$

$$[a]^2 - 3[a] + 2 \le 0 \xrightarrow{[a]=t} t^2 - 3t + 2 \le 0 \rightarrow (t-2)(t-1) \le 0 \rightarrow 1 \le t \le 2$$

$$\rightarrow 1 \le [a] \le 2 \rightarrow 1 \le a < 3 \rightarrow \min(a) = 1 = m$$

بنابراین با جایگزاری $m = 1$ داریم:

$$4\sin(mx)\cos(mx)\cos((m+1)x) = 4\sin x \cos x \cos 2x$$

$$2\sin 2x \cos 2x = \sin 4x \xrightarrow{x = 7/5^\circ} \sin 4(7/5^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۱

$$\text{نکته}: \begin{cases} \text{Sin}(2k\pi \pm \alpha) = \pm \text{Sin}\,\alpha \\ \text{Cos}(\pi + \alpha) = -\text{Cos}\,\alpha \end{cases} , \begin{cases} \text{Sin}(\frac{\pi}{2} \pm \alpha) = \text{Cos}\,\alpha \\ \text{Cos}(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\text{Sin}\,\alpha \end{cases}$$

حاصل هر نسبت مثلثاتی را جداگانه به‌دست می‌آوریم:

$$\text{Sin}\,700^\circ = \text{Sin}(720^\circ - 20^\circ) = \text{Sin}(-20^\circ) = -\text{Sin}\,20^\circ$$

$$\text{Cos}\,200^\circ = \text{Cos}(180^\circ + 20^\circ) = -\text{Cos}\,20^\circ$$

$$\text{Cos}\,250^\circ = \text{Cos}(270^\circ - 20^\circ) = -\text{Sin}\,20^\circ$$

$$\text{Sin}\,110^\circ = \text{Sin}(90^\circ + 20^\circ) = \text{Cos}\,20^\circ$$

بنابراین:

$$\frac{-\text{Sin}\,20^\circ + \text{Cos}\,20^\circ}{-2\text{Sin}\,20^\circ - \text{Cos}\,20^\circ} = m$$

صورت و مخرج کسر بالا را بر $\text{Sin}\,20^\circ$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{-1 + \text{Cot}\,20^\circ}{-2 - \text{Cot}\,20^\circ} = m \Rightarrow -2m - m\cdot\text{Cot}\,20^\circ = -1 + \text{Cot}\,20^\circ \Rightarrow -2m + 1 = (1+m)\text{Cot}\,20^\circ \Rightarrow \text{Cot}\,20^\circ = \frac{1-2m}{1+m}$$

عبارت خواسته‌شده برابر است با:

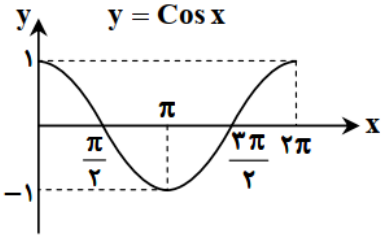
$$\text{Cot}\,74^\circ = \text{Cot}(72^\circ + 2^\circ) = \text{Cot}\,2^\circ = \frac{1-2m}{1+m}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۲

نکته : $\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\text{Cos}\,x$

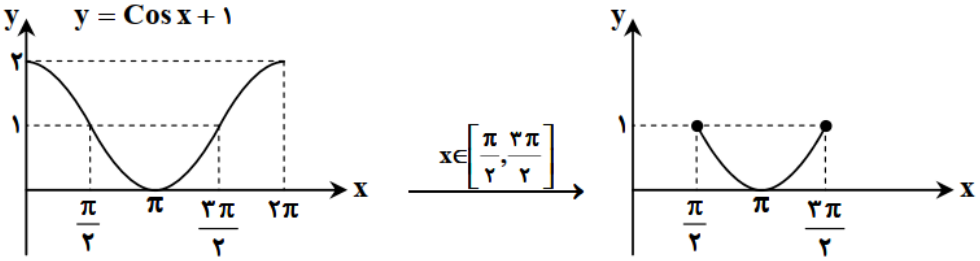
نکته: نمودار تابع $y=\text{Cos}\,x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ مطابق شکل زیر است:



ابتدا تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=۱-\text{Sin}(\frac{۳\pi}{۲}-x)\Rightarrow y=۱-(-\text{Cos}\,x)\Rightarrow y=۱+\text{Cos}\,x$$

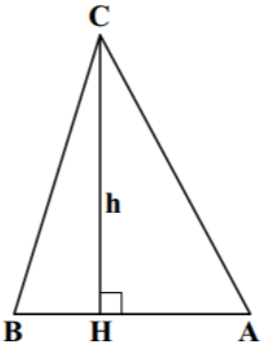
پس کافی است نمودار $y=\text{Cos}\,x$ را یک واحد به‌سمت بالا انتقال دهیم:



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۳

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و ارتفاع وارد بر ضلع AB یعنی $CH=h$ را رسم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{BCH}$ و $\overset{\triangle}{ACH}$، طبق تعریف تانژانت داریم:



$$\overset{\triangle}{BCH}:\tan\hat{B}=\frac{CH}{BH}\Rightarrow ۳=\frac{h}{BH}\Rightarrow BH=\frac{h}{۳}$$

$$\overset{\triangle}{ACH}:\tan\hat{A}=\frac{CH}{AH}\Rightarrow ۲=\frac{h}{AH}\Rightarrow AH=\frac{h}{۲}$$

از طرفی طول ضلع AB برابر ۱۰ است، پس:

$$AB=۱۰\Rightarrow BH+AH=۱۰\Rightarrow \frac{h}{۳}+\frac{h}{۲}=۱۰\Rightarrow \frac{۵h}{۶}=۱۰\Rightarrow h=۱۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۴ ابتدا به‌کمک قضیهٔ فیثاغورس، طول AC و BM را به‌دست می‌آوریم:

$$AC = \sqrt{۷-۳} = ۲ \Rightarrow AM = MC = ۱$$

$$BM^{۲} = AB^{۲} + AM^{۲} \Rightarrow BM^{۲} = ۱+۳ = ۴ \Rightarrow BM = ۲$$

اکنون مساحت مثلث $\overset{\triangle}{MBC}$ را به دو طریق محاسبه کرده و برابر هم قرار می‌دهیم:

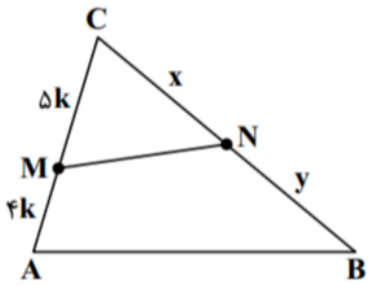
$$S_{\overset{\triangle}{MBC}} = \frac{۱}{۲} \cdot MC \times AB = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times \sqrt{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{\overset{\triangle}{MBC}} = \frac{۱}{۲} BM \times BC \times Sin\,\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times \sqrt{۷} \times Sin\,\alpha$$

$$Sin\,\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۷}} \Rightarrow \frac{۱}{Sin^{۲}\,\alpha} = ۱ + Cot^{۲}\,\alpha \Rightarrow \frac{۲۸}{۳} = ۱ + Cot^{۲}\,\alpha \Rightarrow Cot^{۲}\,\alpha = \frac{۲۵}{۳} \Rightarrow Cot\,\alpha = \frac{۵}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{۳}}{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۵ با توجه به شکل مقابل و داده‌های مسئله داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = ۳ S_{\overset{\triangle}{CMN}} \quad (۱)$$

بنابراین:

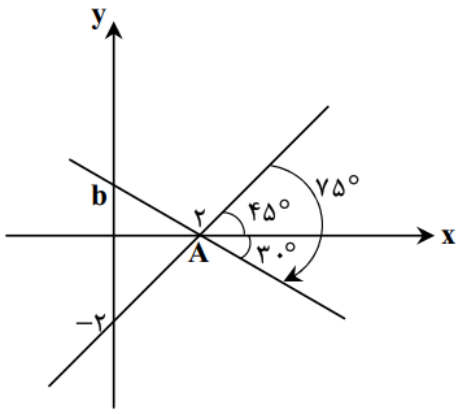
$$\begin{cases} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{۱}{۲} AC \times BC \cdot Sin\,\hat{C} = \frac{۱}{۲} ۹k \times (x+y) Sin\,\hat{C} \\ S_{\overset{\triangle}{MCN}} = \frac{۱}{۲} MC \times CN \cdot Sin\,\hat{C} = \frac{۱}{۲} ۵k \times (x) Sin\,\hat{C} \end{cases} \xrightarrow{(۱)} ۹(x+y) = ۱۵x$$

در نتیجه:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{۱۵}{۹} \Rightarrow ۱ + \frac{y}{x} = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{۲}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

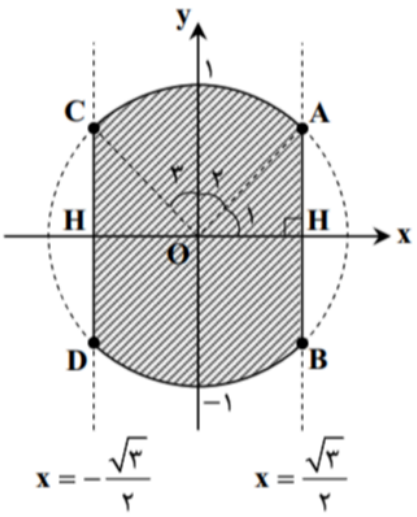
۲۹۶ شیب خط $y = x - ۲$، برابر ۱ است. بنابراین خط مورد نظر با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ ۴۵° می‌سازد. همچنین محل تلاقی این خط با محور طول‌ها، نقطهٔ $A(۲,۰)$ است. اگر این خط را ۷۵° در جهت عقربه‌های ساعت حول A بچرخانیم، خطی به‌دست می‌آید که با جهت مثبت محور طول‌ها زاویهٔ ۱۵۰° (یعنی با جهت منفی زاویهٔ ۳۰°) می‌سازد. پس شیب خط جدید برابر $\tan(-۳۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. عرض از مبدأ این خط که از نقطهٔ $A(۲,۰)$ می‌گذرد، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:



$$y = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}x + b \xrightarrow{A(۲,۰)} ۰ = -\frac{۲\sqrt{۳}}{۳} + b \Rightarrow b = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow b = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۷ مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $|۲x| < \sqrt{۳}$، به‌صورت $-\frac{\sqrt{۳}}{۲} < x < \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. پس ناحیهٔ مورد نظر درون دایرهٔ مثلثاتی به‌شعاع یک و بین دو خط $x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ (ناحیهٔ سایه‌زده شدهٔ روبه‌رو) می‌باشد.



در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{OAH}$، طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AH^۲ + OH^۲ = OA^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲ + (\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ = ۱^۲ \Rightarrow AH = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$AB = ۲AH = ۱$$

به طریق مشابه طول CD نیز برابر ۱ است.

از طرفی در مثلث $\overset{\triangle}{OAH}$ داریم $Cos\hat{O}_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$، پس زاویهٔ $\hat{O}_۱$ برابر $\frac{\pi}{۶}$ است، در نتیجه $\hat{O}_۲ = \hat{O}_۳ = \frac{\pi}{۳}$ و طول کمان AC برابر است با:

$$\overset{\frown}{AC} = ۱ \times (\frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۲\pi}{۳}$$

پس طول کمان BD نیز برابر همین مقدار است و محیط ناحیهٔ مورد نظر برابر است با:

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} + AB + CD = ۲ \times \frac{۲\pi}{۳} + ۲ \times ۱ = \frac{۴\pi}{۳} + ۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۸ با توجه به فرض $\tan\alpha = -\frac{۴}{۳}$ و α در ناحیهٔ چهارم است؛ بنابراین:

$$\frac{۱}{Cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha \Rightarrow Cos^۲\alpha = \frac{۱}{۱ + \frac{۱۶}{۹}} = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow Cos\alpha = \frac{۳}{۵}$$

$$\tan\alpha = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow Sin\alpha = -\frac{۴}{۵}$$

حال داریم:

$$Cos(\frac{۱۷\pi}{۲} + \alpha) = Cos(۸\pi + \frac{\pi}{۲} + \alpha) = Cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -Sin\alpha = \frac{۴}{۵}$$

$$Sin(\alpha - \frac{۱۳\pi}{۲}) = -Sin(۶\pi + \frac{\pi}{۲} - \alpha) = -Sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = -Cos\alpha = -\frac{۳}{۵}$$

پس مقدار A برابر است با:

$$A = ۱۵ \times (-\frac{۳}{۵}) - ۲۰(\frac{۴}{۵}) = -۹ - ۱۶ = -۲۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۹ نسبت‌های مثلثاتی تمامی زاویه‌های داده‌شده را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\alpha = ۳۶^\circ$ بازنویسی می‌کنیم:

$$\sin ۳۰۶^\circ = \sin(۲۷۰^\circ + ۳۶^\circ) = \sin(۱۸۰^\circ + ۹۰^\circ + ۳۶^\circ) = -\sin(۹۰^\circ + ۳۶^\circ) = -\cos ۳۶^\circ$$

$$\sin ۱۲۶^\circ = \sin(۹۰^\circ + ۳۶^\circ) = \cos ۳۶^\circ$$

$$\sin ۲۱۶^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۳۶^\circ) = -\sin ۳۶^\circ$$

بنابراین حاصل کسر مورد نظر برابر است با:

$$A = \frac{\sin ۳۶^\circ + \sin ۳۰۶^\circ}{\sin ۱۲۶^\circ + \sin ۲۱۶^\circ} = \frac{\sin ۳۶^\circ - \cos ۳۶^\circ}{\cos ۳۶^\circ - \sin ۳۶^\circ} = -۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۰ با فرض این‌که دورهٔ تناوب تابع f برابر T باشد، داریم:

$$y = ۳ - ۴f(۲x - ۳) \Rightarrow T_۱ = \frac{T}{۲}$$

$$y = ۴ + ۳f(۲ - ۳x) \Rightarrow T_۲ = \frac{T}{۳}$$

طبق فرض داده‌شده داریم:

$$T_۱ = ۲T_۲ - ۶ \Rightarrow \frac{T}{۲} = \frac{۲T}{۳} - ۶ \xrightarrow{\times ۶} ۳T = ۴T - ۳۶ \Rightarrow T = ۳۶$$

حال داریم:

$$y = ۳f(\frac{x}{۴} + ۲) \Rightarrow T_۳ = ۴T \Rightarrow T_۳ = ۱۴۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

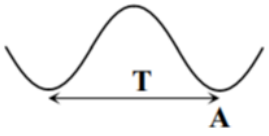
۳۰۱ ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x) = -۲a\cos(b\pi x) + ۳$ است. نمودار داده‌شده قرینهٔ نمودار $y = \cos x$ است (نقطهٔ مینیمم تابع روی محور عرض‌ها است.)، پس ضریب $\cos(b\pi x)$ یعنی $-۲a$ عددی منفی بوده، پس $a > ۰$. عرض نقطهٔ A برابر -۱ است، پس مینیمم تابع برابر -۱ است؛ یعنی:

$$\min = -|-۲a| + ۳ = -۱ \Rightarrow |-۲a| = ۴ \xrightarrow{a>۰} ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

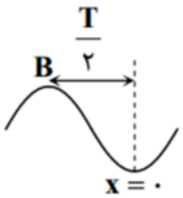
عرض نقطهٔ B، ماکزیمم تابع داده‌شده است؛ بنابراین:

$$\max = |-۲a| + ۳ \xrightarrow{a=۲} \max = ۷ \Rightarrow y_B = ۷$$

از طرفی طول نقطهٔ A برابر ۴ است؛ بنابراین:



$$T = x_A - ۰ \Rightarrow T = ۴$$



$$\frac{T}{۲} = ۰ - x_B \Rightarrow ۲ = -x_B \Rightarrow x_B = -۲$$

بنابراین:

$$B(-۲, ۷) \Rightarrow x_B + y_B = ۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۲ اگر تابع f را ۴ واحد به بالا انتقال دهیم، ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x) = -۳\,Cos\frac{\pi}{a}x + ۲a + ۴$ است و داریم:

$$max = ۳ + ۲a + ۴ = ۲a + ۷$$

$$min = -۳ + ۲a + ۴ = ۲a + ۱$$

چون تابع $y = f(x) + ۴$ بر خط $y = ۹$ مماس است، پس دو حالت زیر رخ می‌دهد:

$$۲a + ۷ = ۹ \Rightarrow a = ۱ \quad یا \quad ۲a + ۱ = ۹ \Rightarrow a = ۴$$

اکنون تابع f را ۶ واحد به پایین انتقال می‌دهیم. ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x) = -۳\,Cos\frac{\pi}{a}x + ۲a - ۶$ است و داریم:

$$max = ۳ + ۲a - ۶ = ۲a - ۳$$

$$min = -۳ + ۲a - ۶ = ۲a - ۹$$

پس تابع $y = f(x) - ۶$، بر دو خط $y = ۲a - ۳$ و $y = ۲a - ۹$ مماس است؛ بنابراین داریم:

$$a = ۱ \Rightarrow \begin{cases} y = -۱ \\ \\ y = -۷ \end{cases} \quad , \quad a = ۴ \Rightarrow \begin{cases} y = ۵ \\ \\ y = -۱ \end{cases}$$

پس به‌ازای مقادیر به‌دست آمده برای a، تابع $y = f(x) - ۶$ می‌تواند بر خط‌های $y = -۱$، $y = -۷$ و $y = ۵$ مماس شود؛ بنابراین گزینهٔ ۳ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۳ با توجه به نمودار داده‌شده داریم:

$$min = ۰ \Rightarrow -|a| + ۲ = ۰ \Rightarrow |a| = ۲ \Rightarrow a = \pm ۲$$

می‌دانیم اگر تابع $y = a\,Sin\,bx$ در اطراف مبدأ مختصات نزولی باشد، باید $ab < ۰$. تابع $y = ۲ + a\,Sin\,a^{۲}x$ در اطراف مبدأ نزولی است، پس:

$$(a)(a^{۲}) < ۰ \Rightarrow a^{۳} < ۰ \Rightarrow a < ۰$$

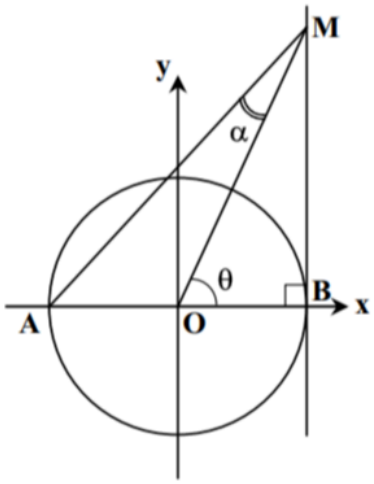
بنابراین مقدار $a = -۲$ قابل قبول است و داریم:

$$g(x) = ۳a + a\,Cos\frac{\pi}{۲a}x \xrightarrow{a=-۲} g(x) = -۶ - ۲\,Cos(-\frac{\pi}{۴}x)$$

$$\begin{cases} max = |-۲| - ۶ = -۴ \\ \\ T = \frac{۲\pi}{|-\frac{\pi}{۴}|} = ۸ \end{cases} \Rightarrow \frac{max}{T} = -\frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۴ با توجه به شکل و محور تانژانت، $BM = \tan\theta$ است، پس داریم:



$$S_{\overset{\triangle}{AOM}} = \frac{۱}{۲} \times |OA \times BM|$$

$$\xrightarrow{OA=۱} ۱ = \frac{۱}{۲} \times BM \Rightarrow BM = \tan\theta = ۲$$

از طرفی:

$$\overset{\triangle}{AMB} : AM^۲ = AB^۲ + BM^۲$$

$$\Rightarrow AM^۲ = ۲^۲ + ۲^۲ \Rightarrow AM = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$\overset{\triangle}{OMB} : OM^۲ = OB^۲ + BM^۲$$

$$\Rightarrow OM^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ \Rightarrow OM = \sqrt{۵}$$

حال داریم:

$$S_{\overset{\triangle}{AOM}} = \frac{۱}{۲} \times AM \times MO \times \sin\alpha$$

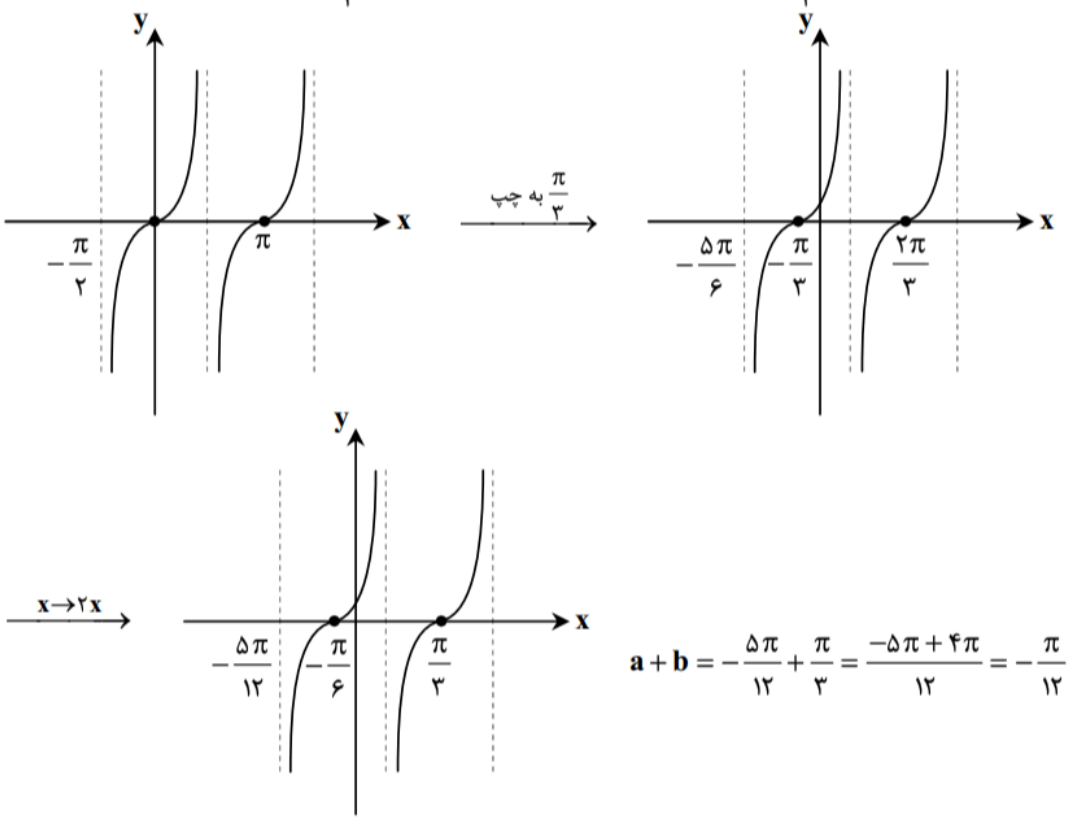
$$\Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۵} \times \sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$$

پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\tan\theta \times \sin\alpha = ۲ \times \frac{۱}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۲}{\sqrt{۱۰}} = \frac{\sqrt{۱۰}}{۵}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۵ نمودار تابع تانژانت را طبق قوانین تبدیل نمودار توابع ابتدا $\frac{\pi}{۳}$ واحد به چپ برده، سپس در راستای افقی $\frac{۱}{۲}$ برابر منقبض می‌کنیم:



یعنی $a = -\frac{۵\pi}{۱۲}$ و $b = \frac{\pi}{۳}$، پس: $a + b = -\frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{\pi}{۳} = \frac{-۵\pi + ۴\pi}{۱۲} = -\frac{\pi}{۱۲}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۶ نکته: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$

با توجه به نکتهٔ بالا، عبارت موردنظر را ساده می‌کنیم:

$$A = \left(\frac{۱}{۱-\sin ۱۰^\circ} - \frac{۱}{۱+\sin ۱۰^\circ}\right)\cos ۱۰^\circ = \frac{(۱+\sin ۱۰^\circ)-(۱-\sin ۱۰^\circ)}{(۱-\sin ۱۰^\circ)(۱+\sin ۱۰^\circ)} \times \cos ۱۰^\circ$$

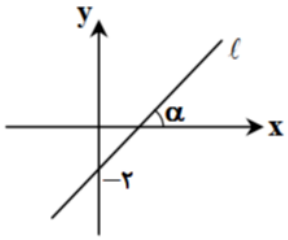
$$= \frac{۲\sin ۱۰^\circ}{۱-\sin^۲ ۱۰^\circ} \times \cos ۱۰^\circ = \frac{۲\sin ۱۰^\circ \cos ۱۰^\circ}{\cos^۲ ۱۰^\circ} = ۲ \times \frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ} = ۲\tan ۱۰^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۷ نکته: شیب یک خط، برابر تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد.

نکته: $۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$

با توجه به شکل، خط ℓ از نقطهٔ $(۰, -۲)$ می‌گذرد، پس:



$$۳(۰) + a(-۲) - ۲\sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow a = -۳$$

بنابراین شیب این خط برابر است با:

$$m = \sqrt{۳}$$

با توجه به نکته، داریم: $\tan\alpha = \sqrt{۳}$، پس:

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha = ۱ + ۳ = ۴ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده}} \cos\alpha = \frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۸ نکته: $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$

ابتدا دو طرف عبارت داده شده را به‌توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^۲=(\frac{۲}{۳})^۲ \Rightarrow \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۴}{۹}$$

$$\Rightarrow ۱+۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{۵}{۹}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha=-\frac{۵}{۱۸} \quad (*)$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}\overset{(*)}{=}\frac{۱}{-\frac{۵}{۱۸}}=-\frac{۱۸}{۵}=-\frac{۳۶}{۱۰}=-۳/۶$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۰۹ نکته:

$$\sin(-x)=-\sin x \quad , \quad \sin(۲k\pi+x)=\sin x$$
$$\cos(-x)=\cos x \quad , \quad \cos(۲k\pi+x)=\cos x$$
$$\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=\cos x \quad , \quad \cos(\pi+x)=-\cos x$$
$$\sin(\frac{\pi}{۲}+x)=\cos x \quad , \quad \cos(\frac{\pi}{۲}+x)=-\sin x$$

ابتدا هرکدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

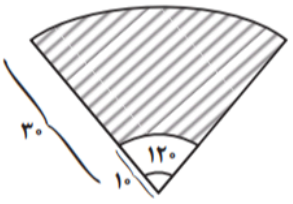
$$\sin(\theta-\frac{\pi}{۲})=\sin(-(\frac{\pi}{۲}-\theta))=-\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(۳\pi-\theta)=\cos(۲\pi+\pi-\theta)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$$
$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}+\theta)=\cos(۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}+\theta)=\cos(\pi+\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-(-\sin\theta)=\sin\theta$$
$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\theta)=\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۲}+\theta)=\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos\theta$$

بنابراین حاصل کسر خواسته‌شده برابر است با:

$$\frac{-۲\cos\theta+۳\cos\theta}{\sin\theta+۲\cos\theta}=\frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta+۲\cos\theta}{\sin\theta}}=\frac{\cot\theta}{۱+۲\cot\theta}=\frac{۳}{۱+۲\times۳}=\frac{۳}{۷}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۱۰ ناحیهٔ پاک‌شده مورد نظر چنین شکلی خواهد داشت:



نکته: مساحت قطاع دایره به زاویهٔ θ رادیان برابر است با: $S=\frac{1}{2}\theta r^2$

$120^\circ=\frac{2\pi}{3}\text{rad}$

حال داریم:

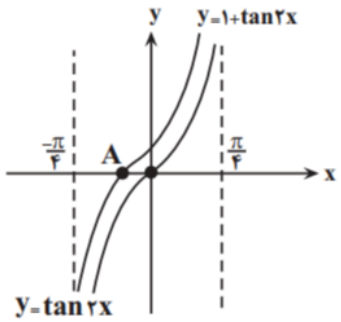
قطاع بزرگ $S=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 1600=\frac{1600\pi}{3}$

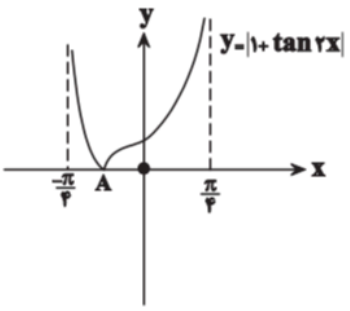
قطاع کوچک $S=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times 100=\frac{100\pi}{3}$

$\Rightarrow$ ناحیهٔ پاک‌شده $S=\frac{1600\pi}{3}-\frac{100\pi}{3}=500\pi$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۱ نمودار را رسم می‌کنیم :





$y_A=0\Rightarrow\tan 2x=-1$

$\Rightarrow 2x=\frac{-\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{-\pi}{8}$

$\frac{\pi}{4}-(\frac{-\pi}{8})=\frac{3\pi}{8}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۲ در ابتدا زاویه‌ها را براساس زاویهٔ مرجع $22/5^\circ=\frac{\pi}{8}$ می‌نویسیم:

$$\frac{\cos(562/5^\circ)-\sin(112/5^\circ)}{\cos(67/5^\circ)+\cos(337/5^\circ)}=\frac{\cos(540^\circ+22/5^\circ)-\sin(90^\circ+22/5^\circ)}{\cos(90^\circ-22/5^\circ)+\cos(360^\circ-22/5^\circ)}=\frac{-\cos(22/5^\circ)-\cos(22/5^\circ)}{\sin(22/5^\circ)+\cos(22/5^\circ)}$$

سپس صورت و مخرج را بر $\cos(22/5^\circ)$ تقسیم می‌کنیم که رابطهٔ داده شده برحسب $\tan(22/5^\circ)$ مرتب شود:

$$=\frac{-2}{\tan(22/5^\circ)+1}=\frac{-2}{\sqrt{2}-1+1}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۳

$$x=\frac{5\pi}{8}\Rightarrow y=2\tan(2\times\frac{5\pi}{8})=2\tan(\frac{5\pi}{4})=2\times 1=2\Rightarrow\begin{cases}DC=T=\frac{\pi}{2}\Rightarrow S=2\times\frac{\pi}{2}=\pi\\ \text{ارتفاع}=2\end{cases}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۴

$$y=a-\cos(\frac{1}{2}+bx)\pi=a-\cos(\frac{\pi}{2}+b\pi x)$$

طبق نمودار **min** تابع صفر است پس:

$$y=a+\sin b\pi x\ (1)\quad 0=-1+a\to a=1$$

از طرفی طبق نمودار دورهٔ تناوب تابع داده شده ۸ است پس:

$$T=\frac{2\pi}{|b\pi|}=8\to\begin{cases}b=\frac{1}{4}\\ b=\frac{-1}{4}\end{cases}$$

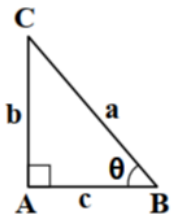
در نقطهٔ شروع تابع روی محور **y**ها تابع نزولی است پس یا باید ضریب **sin** منفی باشد یا ضریب کمان. پس چون ضریب **sin** در (۱) مثبت است پس $b=-\frac{1}{4}$ درست است.

$$y=1+\sin\frac{-\pi}{4}x\quad f(15)=1+\sin\frac{-15\pi}{4}=1+\sin(-4\pi+\frac{\pi}{4})=1+\sin\frac{\pi}{4}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۵ نکته: توابع به فرم $y=\text{Sin}\,x$ و $y=\text{Cos}\,x$ را توابع مثلثاتی می‌نامیم.

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه داریم:

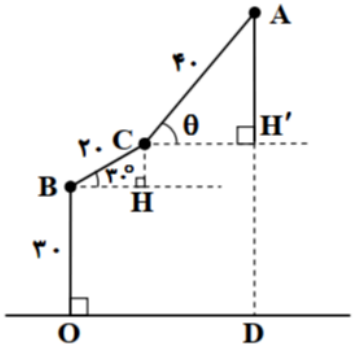


$$\text{Sin}\,\hat{\theta}=\frac{b}{a}$$

$$\text{Cos}\,\hat{\theta}=\frac{c}{a}$$

با توجه به شکل مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ A تا سطح زمین برابر است با:

$$AD=AH'+CH+BO$$



می‌دانیم $BO=۳۰$ می‌باشد، پس کافی است مقدار CH و AH' را به‌دست آوریم:

$$\overset{\triangle}{BHC}:\text{Sin}\,۳۰^\circ=\frac{CH}{BC}\Rightarrow CH=\frac{۱}{۲}\times۲۰=۱۰$$

$$\overset{\triangle}{CH'A}:\text{Sin}\,\theta=\frac{AH'}{AC}\Rightarrow AH'=۴۰\,\text{Sin}\,\theta$$

$$AD=۳۰+۱۰+۴۰\,\text{Sin}\,\theta\Rightarrow AD=f(\theta)=۴۰+۴۰\,\text{Sin}\,\theta=۴۰(۱+\text{Sin}\,\theta)$$

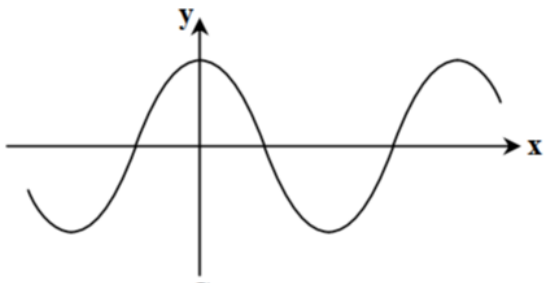
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۱۶ نکته: $\text{Cos}(\pi+\alpha)=-\text{Cos}\,\alpha$

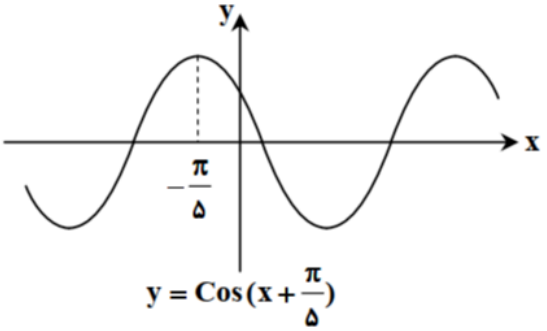
ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y=۱+\text{Cos}(x+\frac{\pi}{۵}+\pi)=۱-\text{Cos}(x+\frac{\pi}{۵})$$

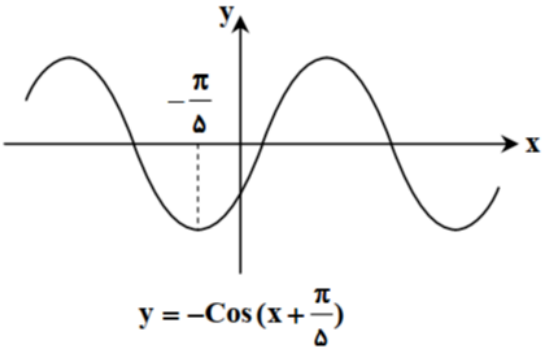
اکنون با توجه به اینکه $۰<\frac{\pi}{۵}<\frac{\pi}{۲}$، تابع را رسم می‌کنیم:



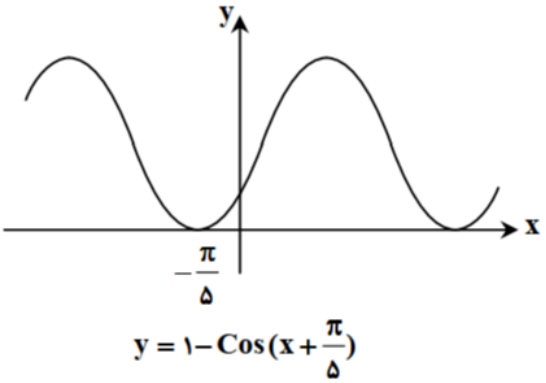
به چپ $\frac{\pi}{۵}$



قرینهٔ عمودی



یک‌واحد به‌بالا

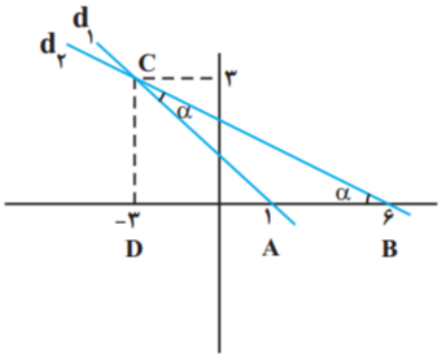


دقت کنید که $f(۰)=۱-\text{Cos}(\frac{\pi}{۵})<۱$؛ در نتیجه در $x=۰$ تابع به خط $y=۰$ نزدیک‌تر است تا $y=۲$.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۱۷ ابتدا دو خط را رسم می‌کنیم:

باید حاصل $\frac{\tan\alpha}{\frac{md_1}{md_2}}$ را به‌دست بیاوریم:



در مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$: $AC^2 = DC^2 + AD^2 \Rightarrow AC^2 = 9+16 \Rightarrow AC = 5$

همچنین با توجه به شکل، $AB = 5$ می‌باشد. بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و $B = C$. لذا:

$$\tan\hat{C} = \tan\hat{B},\ \tan\hat{B} = \frac{CD}{BD} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

از طرفی: $\frac{\text{شیب خط } d_1}{\text{شیب خط } d_2} = \frac{\frac{-3}{4}}{\frac{-1}{3}} = \frac{9}{4} \Rightarrow$ جواب نهایی $= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{27}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۸ نکته: $\text{Sin}(90^\circ - \theta) = \text{Cos}\,\theta$

با توجه به اینکه 1° و 89° و همچنین 2° و 88° متمم یکدیگرند، پس داریم:

$$\begin{cases}\text{Sin}^2 1^\circ + \text{Sin}^2 89^\circ = \text{Sin}^2 1^\circ + \text{Cos}^2 1^\circ = 1 \\ \text{Sin}^2 2^\circ + \text{Sin}^2 88^\circ = \text{Sin}^2 2^\circ + \text{Cos}^2 2^\circ = 1\end{cases} \Rightarrow A = 1+1+\text{Sin}^2 45^\circ + \text{Sin}^2 90^\circ = 1+1+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 1 = 3 + \frac{1}{2} = 3/5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۱۹ نکته: نسبت‌های $\pi - \alpha$ (مکمل α) برحسب α:

$$\text{Sin}(\pi-\alpha) = \text{Sin}\,\alpha \qquad \text{Cos}(\pi-\alpha) = -\text{Cos}\,\alpha \qquad \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \text{Cot}(\pi-\alpha) = -\text{Cot}\,\alpha$$

نکته: نسبت‌های $\pi + \alpha$ برحسب α:

$$\text{Sin}(\pi+\alpha) = -\text{Sin}\,\alpha \qquad \text{Cos}(\pi+\alpha) = -\text{Cos}\,\alpha \qquad \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \qquad \text{Cot}(\pi+\alpha) = \text{Cot}\,\alpha$$

نکته: نسبت‌های $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (متمم α) برحسب α:

$$\text{Sin}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \text{Cos}\,\alpha \qquad \text{Cos}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \text{Sin}\,\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \text{Cot}\,\alpha \qquad \text{Cot}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$$

نکته: نسبت‌های $\frac{\pi}{2} + \alpha$ برحسب α:

$$\text{Sin}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \text{Cos}\,\alpha \qquad \text{Cos}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\text{Sin}\,\alpha \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\text{Cot}\,\alpha \qquad \text{Cot}(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\tan\alpha$$

ابتدا عبارت فرض را ساده می‌کنیم:

$$3\text{Cos}(\frac{\pi}{2}+x) + 2\text{Sin}(\pi - x) = 3(-\text{Sin}\,x) + 2(\text{Sin}\,x) = a \Rightarrow -\text{Sin}\,x = a \Rightarrow \text{Sin}\,x = -a$$

سپس عبارت خواسته‌شده را ساده می‌کنیم:

$$3\text{Cos}(\frac{\pi}{2}-x) - 2\text{Sin}(\pi+x) = 3\text{Sin}\,x - 2(-\text{Sin}\,x) = 5\text{Sin}\,x = -5a$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۲۰ ابتـــدا عبـــارت خواسته‌شـــده را ســـاده مـــی کنـــیم: (دقـــت کنیـــد کـــه:

$$(\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x$$

$$\frac{۱+\sin^۲ x}{\cos^۲ x}=\frac{۱}{\cos^۲ x}+\tan^۲ x \quad =(۱+\tan^۲ x)+\tan^۲ x=۱+۲\tan^۲ x$$

بنابراین کافی است حاصل $(۱+۲\tan^۲ x)$ را به‌دست آوریم. برای این‌کار، صورت و مخرج کسر داده شده را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}-\frac{۲\cos^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{۱}{\cos^۲ x}}{\frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x}+\frac{۲\cos^۲ x}{\cos^۲ x}-\frac{۱}{\cos^۲ x}}=\frac{\tan^۲ x-۲+(۱+\tan^۲ x)}{\tan^۲ x+۲-(۱+\tan^۲ x)}=۳ \Rightarrow \frac{۲\tan^۲ x-۱}{۱}=۳ \Rightarrow \tan^۲ x=۲ \Rightarrow ۱+۲\tan^۲ x=۱+۲(۲)=۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۱ در ابتدا دو طرف $\sin x-\cos x=\frac{۱}{۳}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\rightarrow \cancel{\sin^۲ x+\cos^۲ x}^{۱}-۲\sin x\cos x=\frac{۱}{۹} \rightarrow \sin x\cos x=\frac{۴}{۹}$$

حالا با توجه به اتحادها داریم:

$$\frac{\sin^۶ x+\cos^۶ x}{\sin^۴ x+\cos^۴ x}=\frac{۱-۳\sin^۲ x\cos^۲ x}{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}=\frac{۱-۳\times\frac{۱۶}{۸۱}}{۱-۲\times\frac{۱۶}{۸۱}}=\frac{۸۱-۴۸}{۸۱-۳۲}=\frac{۳۳}{۴۹}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۲ **نکته: در تابع $f(x)=a\,Cos(bx)+c$ دورهٔ تناوب برابر $\frac{۲\pi}{|b|}$، مقدار ماکزیمم برابر $|a|+c$ و مقدار مینیمم برابر $-|a|+c$ است.**

با توجه به نمودار و ورودی تابع در صورت سؤال، تابع در $x=۰$ صعودی است، پس b منفی بوده و چون ماکزیمم تابع برابر $\frac{۹}{۲}$ است، داریم:

$$max=a+|b|=\frac{۹}{۲} \xrightarrow{b<۰} a-b=\frac{۹}{۲} \quad (۱)$$

از طرفی تابع در $x=\frac{\pi}{۶}$ محور xها را قطع کرده، پس مقدار y در این نقطه برابر صفر است.

$$\begin{vmatrix} x=\frac{\pi}{۶} \\ y=۰ \end{vmatrix} \Rightarrow a+b\,Cos(\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۶})=۰ \Rightarrow a+b\,Cos\frac{\pi}{۳}=۰ \Rightarrow a+\frac{b}{۲}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{b}{۲}=-a \Rightarrow b=-۲a \xrightarrow{(۱)} a-(-۲a)=\frac{۹}{۲} \Rightarrow ۳a=\frac{۹}{۲} \Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۲۳ نکته: $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$

نکته: $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$

نکته: اگر α در ناحیهٔ دوم باشد، $\sin\alpha > ۰$.

نکته: $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$.

از $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ و $\cos\theta = \frac{-۱}{۳}$ نتیجه می‌شود:

$$\sin^۲\theta + \frac{۱}{۹} = ۱ \Rightarrow \sin^۲\theta = \frac{۸}{۹} \xrightarrow{\theta \text{ در ناحیهٔ دوم}} \sin\theta = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین:

$$\sin ۲\theta = ۲\sin\theta\cos\theta = ۲\left(\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}\right)\left(-\frac{۱}{۳}\right) = -\frac{۴\sqrt{۲}}{۹}$$

$$\cos ۲\theta = ۲\cos^۲\theta - ۱ = \frac{۲}{۹} - ۱ = -\frac{۷}{۹}$$

پس داریم:

$$\sin ۴\theta = ۲\sin ۲\theta\cos ۲\theta = ۲\left(\frac{-۴\sqrt{۲}}{۹}\right)\left(\frac{-۷}{۹}\right) = \frac{۵۶\sqrt{۲}}{۸۱}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

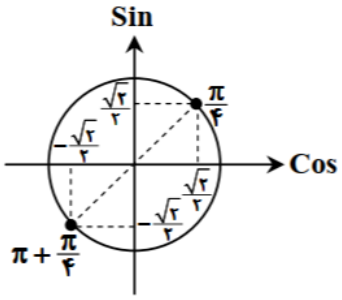
۳۲۴ نکته: $\cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = \cos ۲\alpha \quad , \quad ۲\sin\alpha\cos\alpha = \sin ۲\alpha$

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\cos^۲\frac{x}{۲} - \sin^۲\frac{x}{۲} = \cos(۲\times\frac{x}{۲}) = \cos x \quad , \quad ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲} = \sin(۲\times\frac{x}{۲}) = \sin x$$

پس معادله به شکل $\sin x = \cos x$ درمی‌آید که با توجه به نمودار روبه‌رو در بـازهٔ $[۰, ۲\pi]$

دو جواب ($x = \frac{\pi}{۴}$ و $x = \pi + \frac{\pi}{۴}$) دارد.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۲۵ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \alpha$ و $x = ۲k\pi + \pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin x - \cos ۲x = ۲ \xrightarrow{\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲x} \sin x - (۱ - ۲\sin^۲x) = ۲ \Rightarrow ۲\sin^۲x + \sin x - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{۳}{۲} \text{ غ‌ق‌ق} \\ \sin x = ۱ \end{cases}$$

$$\sin x = ۱ = \sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \text{یا} \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۲۶ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = ۲k\pi + \alpha$ و $x = (۲k+۱)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin^۲x - ۲\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow (\sin x - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۲۷ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

با توجه به رابطهٔ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ می‌توان نوشت:

$$\sin 4x + \sin 3x = 0 \Rightarrow \sin 4x = -\sin 3x = \sin(-3x) \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{7} \\ 4x = 2k\pi + \pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر صحیح k، ریشه‌های معادله در بازهٔ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ برابر صفر و $\frac{2\pi}{7}$ است. پس در این بازه، دو جواب دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۲۸ نکته: جواب‌های کلی معادلهٔ $\sin x = \sin\alpha$ به‌صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

$$1 + \sin x = \cos^4 x - \sin^4 x \Rightarrow 1 + \sin x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) \Rightarrow 1 + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \\ x = 2\pi \end{cases} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پس در مجموع ۵ جواب دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

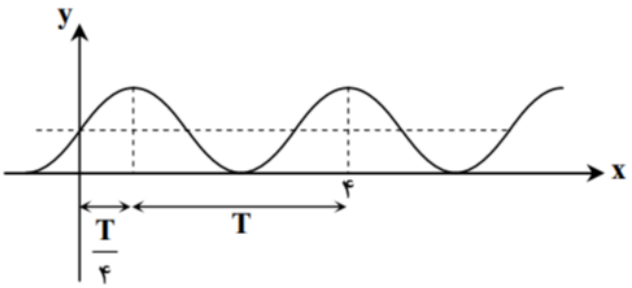
۳۲۹ ابتدا داریم:

$$f(x) = a - \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\pi x\right) = a - \sin(b\pi x) = -\sin(b\pi x) + a$$

باتوجه‌به شکل، مینیمم تابع برابر صفر است؛ بنابراین:

$$a - |-1| = 0 \Rightarrow a = 1$$

از طرفی نمودار f جابه‌جایی افقی نداشته است؛ پس داریم:



$$\frac{5T}{4} = 4 \Rightarrow T = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{16}{5} \Rightarrow b = \pm\frac{5}{8}$$

نمودار تابع f در همسایگی $x = 0$ تابعی اکیداً صعودی است و چون ضریب سینوس برابر -1 است، پس $b < 0$ است؛ بنابراین:

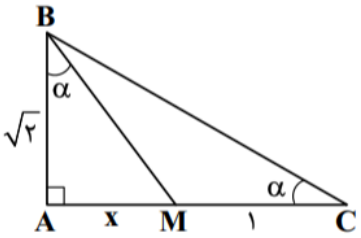
$$b = -\frac{5}{8}$$

پس خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$a + b = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۰ ابتدا باتوجه‌به برابری دو زاویهٔ C و ABM داریم:



$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC}: \tan\hat{C}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sqrt{۲}}{x+۱} \Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{\sqrt{۲}}{x+۱} \\ \overset{\triangle}{ABM}: \tan\hat{B}=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{x}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{۲}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{x+۱}=\frac{x}{\sqrt{۲}} \Rightarrow x^{۲}+x=۲ \Rightarrow x^{۲}+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \ \checkmark \\ x=-۲ \ \times \end{cases}$$

بنابراین: $\tan\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ و داریم:

$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \Rightarrow ۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha} \Rightarrow \cos^{۲}\alpha=\frac{۲}{۳}$$

$$\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱ \Rightarrow \cos ۲\alpha=۲(\frac{۲}{۳})-۱=\frac{۱}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۱ ابتدا حاصل کسر داده‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\sqrt{۴+۴\cos ۴۰^\circ}}{\sqrt{۱-\sin ۵۰^\circ}}=\frac{۲\sqrt{۱+\cos ۴۰^\circ}}{\sqrt{۱-\cos ۴۰^\circ}}=\frac{۲\sqrt{۱+۲\cos^{۲}۲۰^\circ-۱}}{\sqrt{۱-(۱-۲\sin^{۲}۲۰^\circ)}}=\frac{۲\sqrt{۲\cos^{۲}۲۰^\circ}}{\sqrt{۲\sin^{۲}۲۰^\circ}}=\frac{۲\sqrt{۲}\cos ۲۰^\circ}{\sqrt{۲}\sin ۲۰^\circ}=۲\cot ۲۰^\circ$$

اکنون حاصل $\cot ۱۰^\circ-\tan ۱۰^\circ$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\cos ۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ}-\frac{\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}=\frac{\cos^{۲}۱۰^\circ-\sin^{۲}۱۰^\circ}{\sin ۱۰^\circ\cos ۱۰^\circ}=\frac{\cos ۲۰^\circ}{\frac{۱}{۲}\sin ۲۰^\circ}=۲\cot ۲۰^\circ$$

بنابراین حاصل خواسته‌شده برابر است با:

$$۲\cot ۲۰^\circ+۲\cot ۲۰^\circ=۴\cot ۲۰^\circ$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۲ با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، معادلهٔ موردنظر را ساده می‌کنیم:

$$\cos ۲x+۵\cos x=۲ \Rightarrow ۲\cos^{۲}x-۱+۵\cos x=۲ \Rightarrow ۲\cos^{۲}x+۵\cos x-۳=۰$$

اکنون با تغییر متغیر $\cos x=t$، معادله را حل می‌کنیم: $۲t^{۲}+۵t-۳=۰ \Rightarrow t=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۵+۲۴}}{۲\times ۲} \Rightarrow t=\frac{-۵\pm ۷}{۴} \Rightarrow t=\frac{۱}{۲},-۳$

از آنجا که $-۱\le\cos x\le ۱$، جواب $t=-۳$ غیرقابل قبول است: $t=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۳ ابتدا جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{Sin}\,5x=\text{Sin}\,x \Rightarrow \begin{cases} 5x=2k\pi+x \Rightarrow 4x=2k\pi \Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{2} & (k\in\mathbb{Z}) \\ 5x=2k\pi+\pi-x \Rightarrow 6x=2k\pi+\pi \Rightarrow x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6} & (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

اعداد صحیح را به‌جای k جایگذاری می‌کنیم و جواب‌های موجود در بازهٔ $[0,2\pi[$ را به‌دست می‌آوریم.

جواب کلی $x=\dfrac{k\pi}{2}$ در بازهٔ $[0,2\pi[$، شامل جواب‌های $\left\{0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right\}$ و جواب کلی $x=\dfrac{k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ در بازهٔ $[0,2\pi[$، شامل جواب‌های $\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{3\pi}{2},\dfrac{11\pi}{6}\right\}$ است. پس از آنجا که جواب‌های $\dfrac{\pi}{2}$ و $\dfrac{3\pi}{2}$ در هر دو مجموعه مشترک هستند، پس تعداد اعضای مجموعه‌جواب معادله در بازهٔ $[0,2\pi[$ برابر است با: $5+6-2=9$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۴ ابتدا معادلهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم و سپس جواب‌های آن را به‌دست می‌آوریم:

$$2(2\text{Sin}\,x\text{Cos}\,x+\text{Sin}\,x)=1+2\text{Cos}\,x \Rightarrow 4\text{Sin}\,x\text{Cos}\,x+2\text{Sin}\,x-2\text{Cos}x-1=0$$

$$\Rightarrow 2\text{Sin}\,x(2\text{Cos}\,x+1)-(2\text{Cos}\,x+1)=0 \Rightarrow (2\text{Cos}\,x+1)(2\text{Sin}\,x-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\text{Cos}\,x+1=0 \Rightarrow \text{Cos}\,x=-\dfrac{1}{2} \\ 2\text{Sin}\,x-1=0 \Rightarrow \text{Sin}\,x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{x\in(0,\pi)} \begin{cases} x=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3} \\ x=\dfrac{\pi}{6}, x=\dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

بنابراین: $\theta=\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{10\pi}{6}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \theta-8\alpha=\dfrac{10\pi}{6}-\dfrac{8\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \text{Cos}(\theta-8\alpha)=\text{Cos}\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۵

نکتهٔ ۱ : $\text{Sin}\,2\alpha=2\text{Sin}\,\alpha\cdot\text{Cos}\,\alpha$

نکتهٔ ۲ : $\text{Cos}\,2\alpha=\text{Cos}^2\alpha-\text{Sin}^2\alpha=2\text{Cos}^2\alpha-1=1-2\text{Sin}^2\alpha$

$$\tan x+\text{Cot}\,x=4 \Rightarrow \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x}+\frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x}=4 \Rightarrow \frac{\text{Sin}^2x+\text{Cos}^2x}{\text{Sin}\,x\text{Cos}\,x}=4 \Rightarrow 4\text{Sin}\,x\text{Cos}\,x=1 \Rightarrow 2\text{Sin}\,2x=1 \Rightarrow \text{Sin}\,2x=\frac{1}{2}$$

$$\text{Cos}\,4x=1-2\text{Sin}^2\,2x=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۶

$$\text{نکتهٔ ۱}: \cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\sin\alpha \quad , \quad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$

$$\text{نکتهٔ ۲}: \cos x=\cos\alpha \Rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha$$

با استفاده از روابط بالا داریم:

$$\sin(\frac{\pi}{۳}+۲x)+\cos ۳x=۰ \Rightarrow \cos ۳x=-\sin(\frac{\pi}{۳}+۲x)=\cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۳}+۲x)$$

$$\Rightarrow \cos ۳x=\cos(۲x+\frac{۵\pi}{۶}) \Rightarrow ۳x=۲k\pi\pm(۲x+\frac{۵\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+۲x+\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \\ ۳x=۲k\pi-۲x-\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow ۵x=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۵}-\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

جواب‌های واقع در بازهٔ $[۰,\pi]$ عبارتند از:

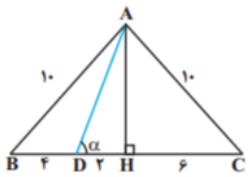
$$\begin{cases} x=\frac{۵\pi}{۶} \\ x=\frac{۲\pi}{۵}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۷\pi}{۳۰} \end{cases} , \quad x=\frac{۴\pi}{۵}-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۹\pi}{۳۰}$$

بنابراین ۳ جواب در بازهٔ $[۰,\pi]$ وجود دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۳۷

ارتفاع AH وارد بر ضلع BC را در مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ رسم می‌کنیم.بنابراین AH میانه نیز خواهد بود. لذا خواهیم داشت:



$$BH=\frac{BC}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶ \quad DH=۶-۴=۲ \quad \text{پس}$$

با توجه به قضیهٔ فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABH}$ خواهیم داشت:

$$AB^۲=BH^۲+AH^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=۶^۲+AH^۲ \Rightarrow ۱۰۰=۳۶+AH^۲ \Rightarrow AH=۸$$

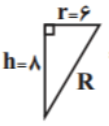
در نتیجه:

$$\overset{\Delta}{AHD}: \cot\alpha=\frac{DH}{AH}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

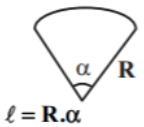
۳۳۸

شعاع قطاع حاصل:



$$R^۲=۶^۲+۸^۲=۱۰۰ \rightarrow R=۱۰ \quad \text{طول کمان } \ell=۲\pi r=۲\pi(۶)=۱۲\pi$$

شکل روبه‌رو قطاع حاصل از گستردگی مخروط را نشان می‌دهد $\rightarrow$



$$\ell=R.\alpha$$

$$۱۲\pi=۱۰\alpha \rightarrow \alpha=\frac{۱۲\pi}{۱۰}=\frac{۶}{۵}\pi$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۹

با استفاده از فرمول‌های کمان ۲α داریم:

$$۳\cos ۲mx+۲\cos^۲ x=۲\cos^۲ x-۱$$

$$\rightarrow ۳\cos ۲mx=-۱ \rightarrow \cos ۲mx=-\frac{۱}{۳}$$

اگر این معادله روی دایرهٔ مثلثاتی ۴ جواب دارد پس $۲m=۲$ و در نتیجه $m=۱$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۰

$$\sin 2x = -\cos 2x = \sin(2x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + 2x - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \pi - (2x - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$x = (4k+3)\frac{\pi}{10}$$

کم‌ترین جواب $x = \frac{3\pi}{10}$ و بیشترین جواب $x = \frac{19\pi}{10}$ است و اختلاف می‌شود $\frac{16\pi}{10}$ یا $\frac{8\pi}{5}$.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۱

دورهٔ تناوب تابع برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

دقت کنید که اختلاف x_B و x_A به اندازهٔ ۳ دورهٔ تناوب یعنی $\frac{3\pi}{2}$ است:

$$\Rightarrow x_B - x_A = \frac{3\pi}{2}$$

از طرفی با توجه به $x = \frac{-\pi}{12}$ و اولین جایی در منفی‌ها که به $-\infty$ میل کرده‌است، داریم:

$$2(-\frac{\pi}{12}) + a = \frac{-\pi}{2} \rightarrow a = -\frac{\pi}{3}$$

و در نتیجه داریم:

$$\frac{x_B - x_A}{a} = \frac{3\frac{\pi}{2}}{-\frac{\pi}{3}} = -4/5$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۲

پاسخ تشریحی **گام اول:** نسبت‌های مثلثاتی موجود در عبارت را با توجه به درس‌نامه ساده می‌کنیم:

$$\sin(\underbrace{\frac{3\pi}{2} - \theta}_{\text{ربع سوم } (\sin<0)}) = \ominus\cos\theta$$

$$\cos(\underbrace{5\pi - \theta}_{\text{ربع دوم } (\cos<0)}) = \ominus\cos\theta$$

$$\tan(\underbrace{\frac{17\pi}{2} + \theta}_{\text{ربع دوم } (\tan<0)}) = \ominus\cot\theta$$

گام دوم: عبارت‌های به‌دست‌آمده در گام اول را در خواستهٔ سؤال جای‌گذاری می‌کنیم تا به ساده‌ترین شکل ممکن در بیاید:

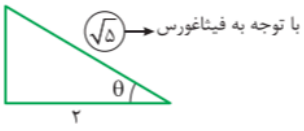
$$\frac{2\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)\cos(5\pi - \theta)}{\tan(\frac{17\pi}{2} + \theta)} = \frac{-2\cos\theta(-\cos\theta)}{-\cot\theta} = \frac{2\cos^2\theta}{-\cot\theta}$$

$$\frac{2\cos^2\theta}{-\cot\theta} = \frac{2\cos^2\theta}{\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}} = -2\sin\theta\cos\theta \quad (*)$$

از آن‌جا که $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ خواهیم داشت:

گام سوم: در صورت سؤال $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ داده شده است، به کمک مثلث فرضی زیر $|\sin\theta|$ و $|\cos\theta|$ را پیدا می‌کنیم:

$$|\underbrace{\tan\theta}_{\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}}| = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

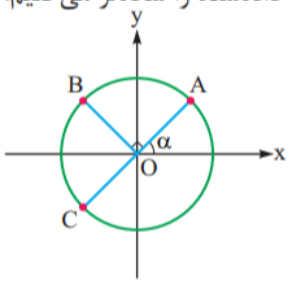


گام چهارم: چون $\tan\theta$ منفی است و $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$؛ پس حاصل‌ضرب $\sin\theta$ و $\cos\theta$ نیز منفی است، با توجه به این موضوع اندازه‌های به‌دست‌آمده را در رابطهٔ $(*)$ در گام دوم جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(*)} -2\underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{(-)} = 2|\sin\theta||\cos\theta| = 2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴۳ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با دقت به شکل و زاویهٔ قائمهٔ داده‌شده می‌بینیم که نقطهٔ B در انتهای کمان $\frac{\pi}{۲}+\alpha$ قرار دارد و هم‌چنین با توجه به امتداد شعاع OA، نقطهٔ C نیز در انتهای کمان $\pi+\alpha$ است، با توجه به این اطلاعات و نکتهٔ گفته‌شده، عبارت داده‌شده را ساده‌تر می‌کنیم:



$$\frac{x_B+y_C}{x_C+y_B-x_A}=\frac{\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)+\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)-\cos\alpha}$$

گام دوم: با توجه به نسبت‌های زوایا به فرم $(k\pi\pm\alpha)$ و $(\frac{k\pi}{۲}\pm\alpha)$ داریم:

$$\frac{\overbrace{\cos(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}^{-\sin\alpha}+\overbrace{\sin(\pi+\alpha)}^{-\sin\alpha}}{\underbrace{\cos(\pi+\alpha)}_{-\cos\alpha}+\underbrace{\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)}_{\cos\alpha}-\cos\alpha}=\frac{-\sin\alpha-\sin\alpha}{-\cos\alpha+\cos\alpha-\cos\alpha}=\frac{-۲\sin\alpha}{-\cos\alpha}$$

گام سوم: با توجه به این‌که $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-۲\sin\alpha}{-\cos\alpha}=۲(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})=۲\tan\alpha$$

عبارت داده‌شده در سؤال برابر $۲\tan\alpha$ است که ۲ برابر $\tan\alpha$ می‌باشد.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** مقادیر نسبت‌های مثلثاتی موجود در صورت و مخرج کسر را تعیین می‌کنیم:

$$\sin(\alpha-\pi)=-\sin(\underbrace{\pi-\alpha}_{\text{ربع دوم}})=-\sin\alpha$$

$$\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\sin(\underbrace{\frac{\pi}{۲}-\alpha}_{\text{ربع اول}})=-\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\pi)=\cos(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{ربع سوم}})=-\cos\alpha$$

$$\sin(\underbrace{-\alpha}_{\text{ربع چهارم}})=-\sin\alpha$$

گام دوم: مقادیر به‌دست‌آمده را در صورت و مخرج کسر جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\sin(\alpha-\pi)-\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})}{۲\cos(\alpha+\pi)+\sin(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha-(-\cos\alpha)}{-۲\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{-\sin\alpha+\cos\alpha}{-۲\cos\alpha-\sin\alpha}$$

گام سوم: حاصل عبارت را مساوی ۲ قرار داده و با طرفین‌وسطین، رابطهٔ بین $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{-\sin\alpha+\cos\alpha}{-۲\cos\alpha-\sin\alpha}=۲\Rightarrow-\sin\alpha+\cos\alpha=-۴\cos\alpha-۲\sin\alpha\Rightarrow\sin\alpha=-۵\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{۱}{۵}\Rightarrow\cot\alpha=-۰/۲$$

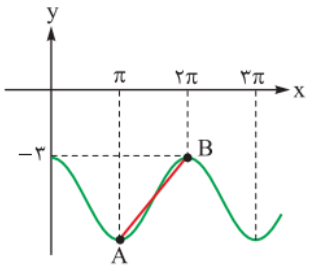
(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴۵ پاسخ تشریحی

گام اول: می‌دانیم $\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=\cos x$، پس $f(x)=m+\cos x$ است. نقطهٔ $(۰,-۳)$ روی نمودار تابع f قرار دارد؛ بنابراین داریم:

$$f(۰)=-۳ \Rightarrow m+\underbrace{\cos ۰}_{۱}=-۳ \Rightarrow m=-۴$$

گام دوم: شیب پاره‌خط AB به مقدار m بستگی ندارد. نقاط A و B، دو نقطهٔ min و max متوالی از این تابع هستند، پس $\Delta y=۲$ و در نتیجه با توجه به نمودار داریم:



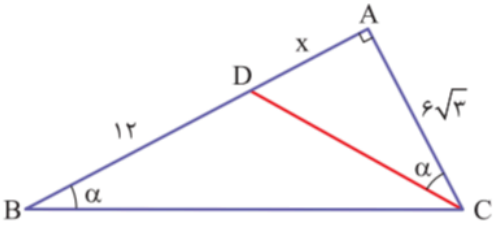
$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۲}{\pi}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴۶ **گام اول:** در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC و ACD، زاویهٔ حادهٔ α حضور دارد، پس نسبت‌های مثلثاتی α در این دو مثلث برابرند.

حال چون طول وترهای BC و CD را نداریم، بهتر است از $\tan\alpha$ استفاده کنیم.

گام دوم: لازم است که طول ضلع AD را حساب کنیم:

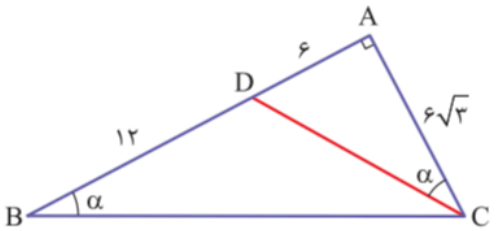


$$\overset{\Delta}{ABC}: \tan\alpha=\frac{AC}{AB}=\frac{۶\sqrt{۳}}{x+۱۲}$$

$$\overset{\Delta}{ACD}: \tan\alpha=\frac{AD}{AC}=\frac{x}{۶\sqrt{۳}}$$

$$\xrightarrow{\tan\alpha \text{ برابری}} \frac{۶\sqrt{۳}}{x+۱۲}=\frac{x}{۶\sqrt{۳}} \Rightarrow x^۲+۱۲x=۱۰۸ \Rightarrow x^۲+۱۲x-۱۰۸=(x+۱۸)(x-۶)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۶$$

گام سوم: اندازه‌های لازم را روی شکل به دست آوردیم:



پس $\tan\alpha=\frac{۶}{۶\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ است، یعنی $\alpha=۳۰^\circ$ است.

گام چهارم: عبارت خواسته‌شده را حساب می‌کنیم:

$$\sin ۳\alpha+\cos ۴\alpha=\sin ۹۰^\circ+\cos ۱۲۰^\circ=۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴۷ **گام اول:** طرفین تساوی $\tan x - \cot x = ۶$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\tan x - \cot x)^۲ = ۳۶ \Rightarrow \tan^۲ x + \cot^۲ x - ۲\underbrace{\tan x \cot x}_{۱} = ۳۶ \Rightarrow \tan^۲ x + \cot^۲ x = ۳۸$$

گام دوم: کسر داده‌شده را تفکیک می‌کنیم:

$$\frac{\sin^۴ x + \cos^۴ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x} = \frac{\sin^۴ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x} + \frac{\cos^۴ x}{\sin^۲ x \cos^۲ x} = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{\cos^۲ x}{\sin^۲ x} = \tan^۲ x + \cot^۲ x$$

با توجه به مقدار به‌دست‌آمده از گام اول، حاصل این عبارت برابر ۳۸ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴۸ **گام اول:** تمام مقادیر نسبت‌های مثلثاتی در صورت سؤال را برحسب نسبت‌های مثلثاتی کمان $\frac{\pi}{۱۴}$ می‌نویسیم.

$$\sin\frac{۳\pi}{۷} = \sin\frac{۶\pi}{۱۴} = \sin(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۱۴}) = \cos\frac{\pi}{۱۴}$$

$$\sin\frac{۱۵\pi}{۱۴} = \sin(\pi + \frac{\pi}{۱۴}) = -\sin\frac{\pi}{۱۴}$$

$$\cos\frac{۴\pi}{۷} = \cos\frac{۸\pi}{۱۴} = \cos(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۴}) = -\sin\frac{\pi}{۱۴}$$

$$\cos\frac{۱۳\pi}{۱۴} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۱۴}) = -\cos\frac{\pi}{۱۴}$$

گام دوم: حاصل عبارت را با تقسیم تمام جملات بر $\cos\frac{\pi}{۱۴}$ محاسبه می‌کنیم.

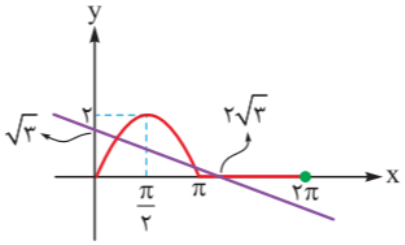
$$A = \frac{۲\cos\frac{\pi}{۱۴} + \sin\frac{\pi}{۱۴}}{-\sin\frac{\pi}{۱۴} + ۲\cos\frac{\pi}{۱۴}} = \frac{\frac{۲\cos\frac{\pi}{۱۴}}{\cos\frac{\pi}{۱۴}} + \frac{\sin\frac{\pi}{۱۴}}{\cos\frac{\pi}{۱۴}}}{\frac{-\sin\frac{\pi}{۱۴}}{\cos\frac{\pi}{۱۴}} + \frac{۲\cos\frac{\pi}{۱۴}}{\cos\frac{\pi}{۱۴}}} = \frac{۲ + \tan\frac{\pi}{۱۴}}{-\tan\frac{\pi}{۱۴} + ۲} = \frac{۲+a}{-a+۲} = \frac{۲+a}{۲-a}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۴۹ **گام اول:** تابع $f(x)$ را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=|\sin x|+\sin x=\begin{cases}\sin x+\sin x:\sin x\geq ۰\\ -\sin x+\sin x:\sin x\leq ۰\end{cases}=\begin{cases}۲\sin x:۰\leq x\leq \pi\\ ۰:\pi\leq x\leq ۲\pi\end{cases}$$

گام دوم: نمودار تابع $f(x)$ و خط داده‌شده را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.



$$x=۲(\sqrt{۳}-y)\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۲\sqrt{۳}\\ \hline y & \sqrt{۳} & ۰\end{array}\qquad (۲\sqrt{۳}>\pi)$$

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، این خط، نمودار تابع $f(x)$ را در سه نقطه قطع می‌کند.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵۰ **گام اول:** ابتدا مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases}\max=a+|b|\\ \min=a-|b|\\ T=\dfrac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{b}\right|}=۲|b|\end{cases}$$

گام دوم: با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\max-\min=۶\Rightarrow (a+|b|)-(a-|b|)=۶\Rightarrow ۲|b|=۶\Rightarrow |b|=۳$$

$$T-\max=۱\Rightarrow ۲|b|-(a+|b|)=۱\Rightarrow |b|-a=۱\xrightarrow{|b|=۳} a=۲$$

گام سوم: دورهٔ تناوب تابع $g(x)$ برابر است با:

$$T'=\frac{۲\pi}{\left|\frac{\pi}{ab}\right|}=۲|ab|=۲\times ۲\times ۳=۱۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵۱ **گام اول:** دو طرف رابطهٔ داده‌شده را بر $\cos^۲\alpha$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan\alpha$ را به دست آوریم:

$$۴\sin^۲\alpha+۹\cos^۲\alpha=۱۲\sin\alpha\cos\alpha \xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر } \cos^۲\alpha} \frac{۴\sin^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}+\frac{۹\cos^۲\alpha}{\cos^۲\alpha}=\frac{۱۲\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^۲\alpha}$$

$$\Rightarrow ۴\tan^۲\alpha+۹=۱۲\tan\alpha \Rightarrow ۴\tan^۲\alpha-۱۲\tan\alpha+۹=۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای}} (۲\tan\alpha-۳)^۲=۰ \Rightarrow ۲\tan\alpha-۳=۰ \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۳}{۲}$$

گام دوم: می‌دانیم که $۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha}$، با توجه به این‌که $\tan\alpha=\frac{۳}{۲}$ داریم:

$$۱+\tan^۲\alpha=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow ۱+\frac{۹}{۴}=\frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \cos^۲\alpha=\frac{۴}{۱۳}$$

گام سوم:

$$\cos۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲(\frac{۴}{۱۳})-۱=\frac{۸}{۱۳}-\frac{۱۳}{۱۳}=\frac{-۵}{۱۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵۲ **گام اول:** معادله را به صورت $۲\cos x=\sin x-۱$ نوشته و طرفین آن را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\xrightarrow{\text{دو طرف به توان ۲}} ۴\cos^۲x=(\sin x-۱)^۲ \Rightarrow ۴(۱-\sin^۲x)=(۱-\sin x)^۲$$

در همین‌جا از رابطهٔ $۲\cos x=(\sin x-۱)$ نتیجه می‌گیریم که $\cos x\le ۰$؛ چراکه $\sin x-۱\le ۰$.

گام دوم: به کمک اتحاد مزدوج رابطهٔ به‌دست‌آمده را ساده می‌کنیم:

$$۴(۱-\sin x)(۱+\sin x)=(۱-\sin x)(۱-\sin x)$$

دو حالت به وجود می‌آید:

حالت اول: $۱-\sin x=۰ \Rightarrow \sin x=۱$

حالت دوم: $۱-\sin x\neq ۰ \Rightarrow ۴(۱-\sin x)(۱+\sin x)=(۱-\sin x)(۱-\sin x)$

$$\Rightarrow ۴(۱+\sin x)=۱-\sin x \Rightarrow ۵\sin x=-۳ \Rightarrow \sin x=-\frac{۳}{۵}$$

پس $\sin\beta=۱$، در نتیجه $\beta=\frac{\pi}{۲}$ و $\sin\alpha=\frac{-۳}{۵}$. (توجه کنید کوچک‌ترین زاویهٔ مثبتی که سینوس آن $\frac{-۳}{۵}$ می‌شود، از $\frac{\pi}{۲}$ بزرگ‌تر است؛ پس β مساوی $\frac{\pi}{۲}$ است.)

گام سوم: دیدیم که $\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$ و قبلاً نتیجه گرفته بودیم که $\cos\alpha<۰$ است، در نتیجه $\cos\alpha=\frac{-۴}{۵}$؛ بنابراین خواستهٔ سؤال برابر می‌شود با:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha-\frac{\pi}{۲})=-\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=-\cos\alpha=-(-\frac{۴}{۵})=\frac{۴}{۵}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵۳ **گام اول:** ابتدا دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم:

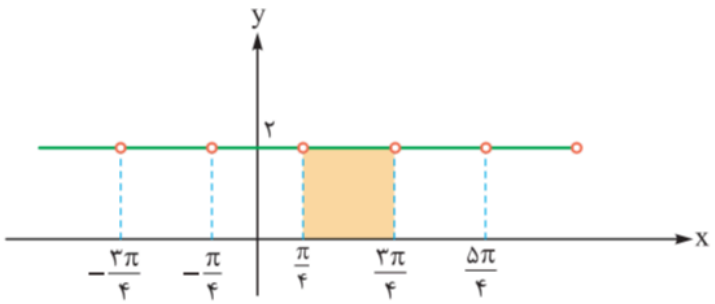
ریشه‌های مخرج: $\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ دامنه: $D = \mathbb{R} - \{\frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

گام دوم: سپس ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$y = \frac{۱ - ۲\sin^۲ x}{\frac{۱}{۲} - \sin^۲ x} = ۲$$

گام سوم: پس نمودار تابع به صورت زیر تکمیل می‌شود:



که مساحت مستطیل رنگی در آن برابر است با: $\frac{۲\pi}{۴} \times ۲ = \pi$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵۴ **گام اول:** ابتدا باید ضابطهٔ f را به دست آوریم. برای این کار $\tan x$ را متغیر جدیدی مثل u در نظر می‌گیریم و داریم:

$$f(\tan x) = \frac{۱ + \tan^۲ x}{۱ + \frac{۱}{\tan^۲ x}} = \frac{۱ + \tan^۲ x}{\frac{۱ + \tan^۲ x}{\tan^۲ x}} = \tan^۲ x \Rightarrow f(u) = u^۲$$

این یعنی ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x) = x^۲$ است.

گام دوم: $f(\cos\frac{\pi}{۸})$ برابر $\cos^۲\frac{\pi}{۸}$ است و برای محاسبهٔ مقدار آن از اتحاد $\cos^۲\theta = \frac{۱ + \cos ۲\theta}{۲}$ استفاده می‌کنیم:

$$\cos^۲\frac{\pi}{۸} = \frac{۱ + \cos\frac{\pi}{۴}}{۲} = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow f(\cos\frac{\pi}{۸}) = \frac{۲ + \sqrt{۲}}{۴}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵۵ **گام اول:** دو کمان $x+\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۳}-x$ متمم یکدیگرند، زیرا:

$$x+\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}-x=\frac{\pi}{۲}$$

پس می‌توانیم معادله را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{۶})+\sin(\frac{\pi}{۲}-(x+\frac{\pi}{۶}))=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow ۲\cos(x+\frac{\pi}{۶})=\sqrt{۲} \Rightarrow \cos(x+\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

گام دوم: حالا این معادلهٔ ساده را حل می‌کنیم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴} \quad , \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۱۲} \\ \text{یا} \\ x=۲k\pi-\frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

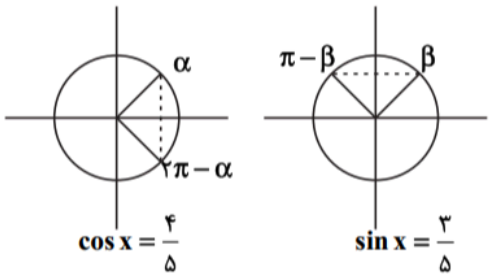
جواب‌های بازهٔ $(۰,۲\pi)$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{۱۲}$ و $\frac{۱۹\pi}{۱۲}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{۲۰\pi}{۱۲}=\frac{۵\pi}{۳}$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۵۶

$$۵\cos x(۵\sin x-۲)=۴(۵\sin x-۲) \Rightarrow (۵\cos x-۴)(۵\sin x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x=\frac{۴}{۵} \\ \text{یا} \\ \sin x=\frac{۲}{۵} \end{cases}$$

که جواب‌های این معادله روی دایره مثلثاتی به صورت‌های زیر است:



دقت کنید که $\alpha\neq\beta$، پس مجموع جواب‌ها برابر است با: $\alpha+۲\pi-\alpha+\beta+\pi-\beta=۳\pi$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۷

$$۴\cos^۲(۲x-\frac{\pi}{۳})-۳=۰ \Rightarrow \cos^۲(۲x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۳}{۴}=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ \Rightarrow \cos(۲x-\frac{\pi}{۳})=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{۵\pi}{۶},\cos\frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow ۲x-\frac{\pi}{۳}=k\pi\pm\frac{\pi}{۶} \begin{cases} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{۳\pi}{۱۲} \Rightarrow i=۳ \\ \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow i=۱ \end{cases}$$

حاصل ضرب مقادیر ممکن برای i برابر ۳ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۸

$$\left.\begin{matrix} y_{max}=|a|+b=۷ \\ y_{min}=-|a|+b=-۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow b=۳\ ,\ |a|=۴$$

چون نمودار در شروع از $x=۰$ به سمت پایین می‌رود، $a=-۴$ قابل قبول است. پس داریم:

$$f(x)=۳-۴\sin x \Rightarrow f(\frac{۲۵\pi}{۶})=۳-۴\sin(\frac{۲۵\pi}{۶})=۳-۴\sin(\frac{\pi}{۶})=۳-۲=۱$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۹

$$\frac{\cot^۲x-\cos^۲x}{\tan^۲x-\sin^۲x}=\frac{\cos^۲x.\cot^۲x}{\tan^۲x.\sin^۲x}=\cot^۶x=۲۷ \Rightarrow \cot x=\pm\sqrt{۳}$$

در هر بازه به طول π، یک جواب به ازای $\cot x=\sqrt{۳}$ و یک جواب به ازای $\cot x=-\sqrt{۳}$ موجود است، پس تعداد کل جواب‌ها در بازهٔ $(-\pi,۳\pi)$ برابر $۴\times۲=۸$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۰

$$\cos۸x=۲\cos^۲۴x-۱=۲(۲\cos^۲۲x-۱)^۲-۱=۸\cos^۴۲x-۸\cos^۲۲x+۱ \quad \frac{\cos۸x+\cos x}{۸}=\cos^۴۲x-\cos^۲۲x \Rightarrow ۸\cos^۴۲x-۸\cos^۲۲x$$

$$+۱+\cos x=۸\cos^۴۲x-۸\cos^۲۲x \Rightarrow \cos x=-۱ \Rightarrow \pm\pi\ ,\ \pm۳\pi, \pm۵\pi$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

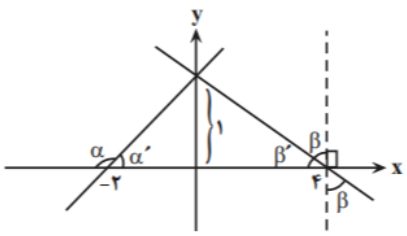
۳۶۱

$$-۱\le\cos x\le۱\Rightarrow ۰\le|\cos x|\le۱\Rightarrow -۱\le|\cos x|-۱\le۰ \rightarrow -۱\le t\le۰ \quad |\cos x|-۱=t \rightarrow \text{برد تابع} \begin{cases} ۳^t \rightarrow y_{min}=۳^{-۱}=\frac{۱}{۳} \\ y_{max}=۳^۰=۱ \end{cases} \Rightarrow b-a=\frac{۲}{۳}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۲

اگر مطابق شکل زوایای α' و β' را تعریف کنیم، داریم:



$$\beta+\beta'=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\tan\beta=\cot\beta'$$

$$\alpha+\alpha'=\pi\Rightarrow\tan\alpha=-\tan\alpha' \Rightarrow \tan\alpha\times\tan\beta=-\tan\alpha'\times\cot\beta'=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱}=-۲$$

دقت کنید α' و β' هر دو حاده‌اند و $\tan$ و $\cot$ آنها عددی مثبت است!

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۳

$$\left.\begin{matrix} \cos(۳۰۷^\circ)=\cos(\frac{۳\pi}{۲}+۳۷^\circ)=+\sin(۳۷^\circ) \\ \sin(۱۴۳^\circ)=\sin(\pi-۳۷^\circ)=\sin(۳۷^\circ) \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{صورت}=-۵\sin(۳۷^\circ) \qquad \left.\begin{matrix} \cos(۱۲۷^\circ)=\cos(\frac{\pi}{۲}+۳۷^\circ)=-\sin(۳۷^\circ) \\ -\sin(۲۱۷^\circ)=-\sin(\pi+۳۷^\circ)=+\sin(۳۷^\circ) \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{مخرج}=+\sin۳۷^\circ$$

$$\text{حاصل کسر}=\frac{-۵}{۱}=-۵$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۴

$$\cos 2x = 0 \to 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه‌مخرج}} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \to x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

برای جواب‌ها در بازه $(-\pi, \pi)$:

k	-2	-1	0	1
x	$\underbrace{-\pi + \frac{\pi}{4}}_{-\frac{3\pi}{4}}$	$\underbrace{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}_{-\frac{\pi}{4}}$	$\frac{\pi}{4}$	$\underbrace{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}_{\frac{3\pi}{4}}$

ریشه‌های مخرج:

k	-1	0	1
x	$-\pi - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

مجموعه جواب‌ها:

$$\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\} - \{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\} = \{\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}$$

جمع جواب‌ها $\frac{-3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{-2\pi}{4} = \frac{-\pi}{2}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۵

$$y = -a\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{b}{2}x) = a\sin\frac{b}{2}x$$

نمودار ۳ دوره تناوب را طی کرده است.

$$3T = \frac{9}{2} - (-\frac{3}{2}) = 6 \Rightarrow T = 2 \quad T = \frac{2\pi}{|\frac{b}{2}|} = 2 \Rightarrow |b| = 2\pi$$

با توجه به بیشترین مقدار تابع داریم: $|a| = 3$

نمودار سینوس نسبت به شکل کلی خود قرینه شده است پس $a.b < 0$ خواهد بود.

$$\Rightarrow ab = -|a.b| = -(3 \times 2\pi) = -6\pi$$

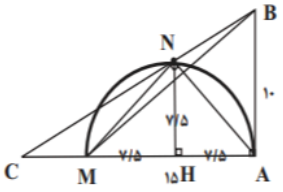
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۶

مطابق شکل به قطر AM دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در N قطع کند. دقت کنید که $A\hat{N}M = 90°$ زیرا روبرو به قطر دایره است. از طرفی چون N از AB و AC به یک فاصله است، روی نیمساز زاویه A قرار دارد پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45°$، پس مثلث ANM متساوی الساقین نیز هست

با رسم ارتفاع NH در این مثلث داریم: $NH = \frac{15}{2}$ زیرا NH میانه نیز هست و در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

با استفاده از قضیه تالس داریم:



$$NH \parallel BA \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{7/5}{10} \Rightarrow \frac{CM + 7/5}{CM + 15} = \frac{3}{4} \Rightarrow CM = 15 \quad \Rightarrow CA = 30$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۷ فرض می‌کنیم $\angle POA=\alpha$ و $\angle P'OA=\beta$ پس داریم:

$$\cos\beta=\frac{۳}{۵}\Rightarrow\sin\beta=\sqrt{۱-\cos^{۲}\beta}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}\Rightarrow P'(\frac{۳}{۵},\frac{۴}{۵})\Rightarrow\tan\beta=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow AB=\frac{۴}{۳}$$

$$S=S_{OAB}-S_{OAC}\Rightarrow\frac{۷}{۲۴}=\frac{AB\times OA}{۲}-\frac{AC\times OA}{۲}\Rightarrow\frac{۷}{۲۴}=\frac{\frac{۴}{۳}\times۱}{۲}-\frac{AC\times۱}{۲}\Rightarrow AC=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$$

$$۱+\tan^{۲}\alpha=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow۱+\frac{۹}{۱۶}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{۴}{۵}\rightarrow\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow P(\frac{۴}{۵},\frac{۳}{۵})\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{۴}{۵}\\ b=\frac{۳}{۵}\rightarrow\frac{ab}{c}=\frac{\frac{۴}{۵}\times\frac{۳}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۳}{۵}\\ c=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶۸

$$\cos(\frac{۱۷\pi}{۶})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۶})=-\cos(\frac{\pi}{۶})=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos(\frac{۸\pi}{۳})=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

$$\cos(\frac{۱۱\pi}{۶})=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\sin(\frac{۱۹\pi}{۳})=\sin(۶\pi+\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۴}{\sqrt{۳}}\times-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۱-\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=۱-\frac{۴}{۳}=-\frac{۱}{۳}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۶۹

$$\cos x+\sin۳x=۰\Rightarrow\cos x=-\sin۳x\Rightarrow\cos x=\sin(-۳x)\Rightarrow\cos(\frac{\pi}{۲}+۳x)=\cos x\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{\pi}{۲}+۳x=۲k\pi+x\Rightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\\ \frac{\pi}{۲}+۳x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}\end{cases}$$

دقت کنید کلیه جواب‌های دسته جواب دوم یعنی $x=\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۸}$، ریشه‌های مخرج هستند پس قابل قبول نیستند.

$$x=k\pi-\frac{\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}k=۱\rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴}\\ k=۲\rightarrow x=\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۰

$$\sin^{۲}(x-\frac{۷\pi}{۲})=\sin^{۲}(\frac{۷\pi}{۲}-x)=\sin^{۲}(۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cos^{۲}x$$

$$\cos(x+\frac{۱۷\pi}{۲})=\cos(x+۸\pi+\frac{\pi}{۲})=-\sin x \Rightarrow \frac{\cos^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱-\sin^{۲}x}{۱+\sin x}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow ۱-\sin x=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\sin x=\frac{۳}{۴}$$

$$\tan(x-\frac{۲۷\pi}{۲})=-\tan(\frac{۲۷\pi}{۲}-x)=-\tan(۱۲\pi+\frac{۳\pi}{۲}-x)=-\cot x$$

$$۱+\cot^{۲}x=\frac{۱}{\sin^{۲}x}\Rightarrow ۱+\cot^{۲}x=\frac{۱}{\frac{۹}{۱۶}}\Rightarrow\cot^{۲}x=\frac{۷}{۹}\Rightarrow\cot x=\pm\frac{\sqrt{۷}}{۳}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۷۱

$$\cot^{۲}(x-\frac{۱۱\pi}{۲})=\cot^{۲}(\frac{۱۱\pi}{۲}-x)=\cot^{۲}(۴\pi+\frac{۳\pi}{۲}-x)=\cot^{۲}(\frac{۳\pi}{۲}-x)=\tan^{۲}x$$

$$۸\sin^{۲}x=۱+\tan^{۲}x\Rightarrow ۸\sin^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}\Rightarrow ۸\sin^{۲}x\cos^{۲}x=۱$$

$$\Rightarrow ۲(۲\sin x\cos x)^{۲}=۱\Rightarrow ۲\sin^{۲}۲x=۱\Rightarrow\sin^{۲}۲x=\frac{۱}{۲}=\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۲x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۸}$$

نکته: اگر $\sin^{۲}x=\sin^{۲}\alpha$ و $\cos^{۲}x=\cos^{۲}\alpha$، آن‌گاه: $x=k\pi\pm\alpha$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۲

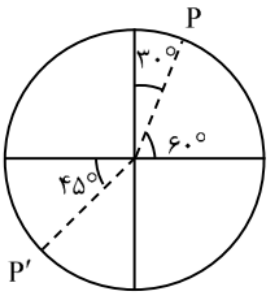
اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد: $x^{۲}+y^{۲}=۱$؛ پس:

$$(a^{۲}-\frac{۱}{۴})^{۲}+a^{۲}=۱\Rightarrow a^{۴}+\frac{a^{۲}}{۲}-\frac{۱۵}{۱۶}=۰\xrightarrow[a^{۲}=t]{\times ۱۶}۱۶t^{۲}+۸t-۱۵=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=\frac{۳}{۴}\rightarrow a^{۲}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow P(\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})\\ t=-\frac{۵}{۴}\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$b^{۲}+b^{۲}=۱\Rightarrow ۲b^{۲}=۱\Rightarrow b=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow P'(-\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

باتوجه به شکل روبرو:



$$\alpha=۳۰^{\circ}+۹۰^{\circ}+۴۵^{\circ}=۱۶۵^{\circ}$$

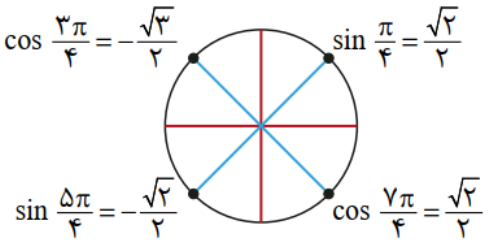
$$\Rightarrow\alpha=\pi-\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

$$\sin(۲\alpha-\frac{۱۱\pi}{۲})=-\sin(۵\pi+\frac{\pi}{۲}-۲\alpha)=\cos۲\alpha$$

$$=\cos\frac{۱۱\pi}{۶}=\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۳



$$\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{۳\pi}{۴}\sin\frac{۵\pi}{۴}\cos\frac{۷\pi}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

به همین ترتیب حاصل ضرب هر چهار مقدار متوالی بعدی که در یک دور دایره مثلثاتی قرار می‌گیرند، برابر $\frac{۱}{۴}$ است، پس اگر ۱۳ دسته چهارتایی در نظر بگیریم تا $\cos\frac{۱۰۳\pi}{۴}$ پیش می‌رویم که حاصل ضرب آنها برابر $\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۳}$ می‌شود. بنابراین حاصل عبارت عبارت داده شده برابر است با:

$$\frac{\left(\frac{۱}{۴}\right)^{۱۳}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=\sqrt{۲}^{-۵۱}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۴

$$\sin\left(\alpha-\frac{۱۷\pi}{۱۰}\right)=\frac{۳}{۵}\Rightarrow-\sin\left(\frac{۱۷\pi}{۱۰}-\alpha\right)=\frac{۳}{۵}\qquad \cos\left(\frac{\pi}{۵}-\alpha\right)=\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\text{حاده }\frac{\pi}{۵}-\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{۵}-\alpha\right)=\frac{۴}{۵}$$

$$\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+\frac{\pi}{۵}-\alpha\right)=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow-\cos\left(\frac{\pi}{۵}-\alpha\right)=-\frac{۳}{۵}\qquad \sin\left(\frac{۱۶\pi}{۵}-\alpha\right)=\sin\left(۳\pi+\frac{\pi}{۵}-\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{۵}-\alpha\right)=-\frac{۴}{۵}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۵

$$f(x)=\cos۲x+a\left(\frac{۱-\cos۲x}{۲}\right)+b=\left(۱-\frac{a}{۲}\right)\cos۲x+\frac{a}{۲}+b\Rightarrow T=\pi$$

$$f(۰)=۲\Rightarrow ۱+b=۲\Rightarrow b=۱$$

$$f\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۴\Rightarrow -۱+a+b=۴\Rightarrow a=۴$$

$$f(x)=-\cos۲x+۳\Rightarrow f\left(\frac{T}{۸}\right)=f\left(\frac{\pi}{۸}\right)=-\cos\frac{\pi}{۴}+۳=۳-\frac{۲}{۲}=\frac{۶-\sqrt{۲}}{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۶

$$\sin\left(ax+\frac{\pi}{۴}\right)=-\sin(ax)$$

$$\sin\left(ax+\frac{\pi}{۴}\right)=\sin(-ax)$$

$$\begin{cases} ax+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-ax\Rightarrow x=(۸k-۱)\frac{\pi}{۸a} \\ \cancel{ax}+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi+\cancel{ax}\rightarrow k=-\frac{۳}{۸}\text{غ ق ق} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳
x	$-\frac{\pi}{۸a}$	$\frac{۷\pi}{۸a}$	$\frac{۱۵\pi}{۸a}$	$\frac{۲۳\pi}{۸a}$

غ ق ق

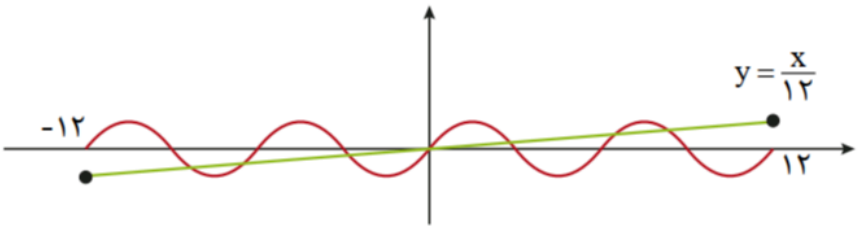
$$\frac{۱۵\pi}{۸a}<۲\pi\le\frac{۲۳\pi}{۸a}\Rightarrow ۱۵<۱۶a\le ۲۳$$

$$\frac{۱۵}{۱۶}<a\le\frac{۲۳}{۱۶}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۷

$$x - ۱۲\sin x = ۰ \to \sin x = \frac{x}{۱۲}$$

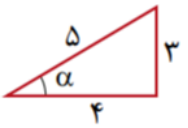


برای رسم دقیق خط $y = \frac{x}{۱۲}$ از نقاط $(۱۲,۱)$ و $(-۱۲,۱)$ استفاده می‌کنیم. معادلهٔ فوق دارای هفت ریشه است. پس مخرج ۷ ریشه دارد.

عبارت $\sqrt[۳]{\cos x}$ در R تعریف شده است. پس مجموعه A، ۷ عضو دارد.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۸



$$\tan\left(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha\right)+۲\cot(۵\pi-\alpha)=-۴$$

$$-\cot\alpha-۲\cot\alpha=-۴\Rightarrow\cot\alpha=\frac{۴}{۳}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$$

$$\tan^۲\left(\frac{۷\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲}\right)=\frac{\sin^۲\left(\frac{۷\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲}\right)}{\cos^۲\left(\frac{۷\pi}{۴}-\frac{\alpha}{۲}\right)}=\frac{\frac{۱}{۲}\left(۱-\cos\left(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha\right)\right)}{\frac{۱}{۲}\left(۱+\cos\left(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha\right)\right)}$$

$$=\frac{۱+\sin\alpha}{۱-\sin\alpha}=\frac{۱+\frac{۳}{۵}}{۱-\frac{۳}{۵}}=۴$$

یادآوری:

$$\tan^۲ x=\frac{۱-\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷۹

$$۱+\sin ۱۰^\circ=۱+\cos ۸۰^\circ=۲\cos^۲ ۴۰^\circ$$

$$۱+\sin ۵۰^\circ=۱+\cos ۴۰^\circ=۲\cos^۲ ۲۰^\circ$$

$$۱-\sin ۷۰^\circ=۱+\cos ۱۶۰^\circ=۲\cos^۲ ۸۰^\circ$$

$$\Rightarrow A=۸\left(\cos ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ\cos ۸۰^\circ\right)^۲$$

$$=۸\left(\frac{\sin ۲۰^\circ\cos ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ\cos ۸۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}\right)^۲$$

$$=۸\left(\frac{\sin ۴۰^\circ\cos ۴۰^\circ\cos ۸۰^\circ}{۲\sin ۲۰^\circ}\right)^۲$$

$$=۸\left(\frac{\sin ۸۰^\circ\cos ۸۰^\circ}{۴\sin ۲۰^\circ}\right)^۲$$

$$=۸\left(\frac{\sin ۱۶۰^\circ}{۸\sin ۲۰^\circ}\right)^۲$$

$$=۸\left(\frac{\sin ۲۰^\circ}{۸\sin ۲۰^\circ}\right)^۲$$

$$=۸\left(\frac{۱}{۸}\right)^۲=\frac{۱}{۸}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۰

$$\frac{۳}{۲}T=۹-(-۳)\Rightarrow T=۸\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۸\Rightarrow|b|=\frac{\pi}{۴}$$

$$f_{min}=-۴\Rightarrow-۱-|a|=-۴\Rightarrow|a|=۳$$

$$f(۰)>۰\Rightarrow a\sin\frac{\pi}{۴}-۱>۰\Rightarrow a\frac{\sqrt{۲}}{۲}>۱\Rightarrow a>\sqrt{۲}\Rightarrow a=۳$$

$$f'(x)=ab\cos\left(bx+\frac{\pi}{۴}\right)\Rightarrow f'(۰)=ab\cos\frac{\pi}{۴}>۰\Rightarrow\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}b>۰\Rightarrow b>۰$$

$$\Rightarrow b=\frac{\pi}{۴}$$

$$f(x)=۳\sin\left(\frac{\pi}{۴}x+\frac{\pi}{۴}\right)-۱\Rightarrow f(۲)=۳\sin\left(\frac{۲\pi}{۴}+\frac{\pi}{۴}\right)-۱$$

$$=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}-۱=\frac{۳\sqrt{۲}-۲}{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۱

$$\sqrt{۳}\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}=۲\sin ۲x$$

$$\begin{cases}\sin ۲x=۰\Rightarrow ۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲},k\in Z\Rightarrow\begin{cases}x=۰,x=\pi,x=۲\pi\\x=\frac{\pi}{۲},x=\frac{۳\pi}{۲}\\(غ ق ق)\quad(غ ق ق)\end{cases}\\\sqrt{۳}\sin x=۲\cos x\cos ۲x\overset{❶}{\Rightarrow}۳\sin^۲x=۴\cos^۲x\cos^۲۲x\end{cases}$$

$$۳\left(۱-\cos^۲x\right)=۴\cos^۲x\left(۲\cos^۲x-۱\right)^۲\xrightarrow{t=\cos^۲x}۳(۱-t)=۴t(۲t-۱)^۲$$

$$۴t\left(۴t^۲-۴t+۱\right)-۳(۱-t)=۰\Rightarrow ۱۶t^۳-۱۶t^۲+۷t-۳=۰$$

$$۱۶t^۳-۱۲t^۲-\left(۴t^۲-۷t+۳\right)=۰\Rightarrow ۴t^۲(۴t-۳)-(۴t-۳)(t-۱)=۰$$

$$(۴t-۳)\underbrace{\left(۴t^۲-t+۱\right)}_{\Delta<۰}=۰\Rightarrow t=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\cos^۲x=\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow\cos x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{۶},x=\frac{۷\pi}{۶}\\x=\frac{۵\pi}{۶},x=\frac{۱۱\pi}{۶}\\(غ ق ق)\quad(غ ق ق)\end{cases}$$

$x=\frac{۵\pi}{۶}$ و $x=\frac{۱۱\pi}{۶}$ در معادلهٔ ❶ صدق نمی‌کنند.

پس معادله پنج جواب در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارد.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۲ در ابتدا دقت می‌کنیم که شعاع دایره ۱ است پس محیط مثلث برابر است با:

$$۱+\sin\theta+\cos\theta=\frac{۵}{۳}\rightarrow\sin\theta+\cos\theta=\frac{۲}{۳}$$

از طرفی با توجه به اتحاد $(a-b)^۲+(a+b)^۲=۲(a^۲+b^۲)$ داریم:

$$\underbrace{(\sin\theta+\cos\theta)^۲}_{\frac{۴}{۹}}+(\sin\theta-\cos\theta)^۲=۲\underbrace{(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)}_{۱}=۲$$

$$\rightarrow(\sin\theta-\cos\theta)^۲=\frac{۱۴}{۹}\xrightarrow{\sqrt{\ }}|\sin\theta-\cos\theta|=\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۳

$$A=\frac{(۱+\cos۲۰^\circ)+\sin۲۰^\circ}{\sin۱۰^\circ+\cos۱۰^\circ}=\frac{۲\cos^۲۱۰^\circ+۲\sin۱۰^\circ\cos۱۰^\circ}{\sin۱۰^\circ+\cos۱۰^\circ}$$

$$=\frac{۲\cos۱۰^\circ(\cos۱۰^\circ+\sin۱۰^\circ)}{\sin۱۰^\circ+\cos۱۰^\circ}=۲\cos۱۰^\circ$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۴

$$g(x)=۰\Rightarrow\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{۴}\right)+۱=۰\Rightarrow\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{۴}\right)=-۱$$

$$\pi x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=۲k-\frac{۳}{۴}\quad,\quad k\in Z$$

$$f(x)=۰\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi x}{۲}+m\pi\right)=۰\Rightarrow\frac{\pi x}{۲}+m\pi=k'\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$x=۲k'+۱-۲m\quad,\quad k'\in Z$$

باید مقدار m را طوری تعیین کنیم که جواب‌های دو معادله یکسان باشند.

$$۲k-\frac{۳}{۴}=۲k'+۱-۲m\Rightarrow۲(k-k')=\frac{۷}{۴}-۲m$$

$$۲t-\frac{۷}{۴}=-۲m\Rightarrow m=\frac{۷-۸t}{۸}\quad,\quad t\in Z$$

به ازای $t=-۳$ به دست می‌آید

$$m=\frac{۳۱}{۸}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۵

$$\tan^۳x-\tan^۲x=\cot^۲x-\cot^۳x\xrightarrow{\times\tan^۳x}\tan^۶x-\tan^۵x=\tan x-۱\Rightarrow$$

$$\tan^۵x(\cancel{\tan x}-۱)=\cancel{\tan x}-۱\Rightarrow\begin{cases}\tan x-۱=۰\\ \tan^۵x=۱\end{cases}\Rightarrow\tan x=۱$$

$$\tan x=۱\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\rightarrow$$

k	۰	۱	۲	۳
x	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۹\pi}{۴}$	$\frac{۱۳\pi}{۴}$

حداکثر a جواب چهارم جدول بالاست، یعنی: $\frac{۱۳\pi}{۴}$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸۶ تابع سینوسی $y = a\,Sin(bx+d)+c$، حداکثر در بازه‌ای به‌طول نیمی از دورهٔ تناوب خود، اکیداً صعودی و در نیم دیگر اکیداً نزولی است.

دورهٔ تناوب تابع $f(x) = a\,Sin(a\pi x+\frac{\pi}{۳})-۷$ برابر است با:

$$T = \frac{۲\pi}{|a\pi|} = \frac{۲\pi}{|a|\pi} = \frac{۲}{|a|}$$

بنابراین حداکثر طول بازه‌ای که تابع f در آن اکیداً صعودی است، برابر $\frac{۱}{|a|}$ بوده و داریم:

$$\frac{۱}{|a|} = ۲ \Rightarrow |a| = \frac{۱}{۲}$$

از طرفی برد تابع برابر فاصلهٔ بین ماکزیمم و مینیمم تابع است.

$$min = -۷ - |a| = -۷ - \frac{۱}{۲} = -۷/۵$$

$$max = -۷ + |a| = -۷ + \frac{۱}{۲} = -۶/۵$$

بنابراین برد تابع، بازهٔ $[-۷/۵, -۶/۵]$ است که طول آن برابر است با:

$$-۶/۵ - (-۷/۵) = ۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸۷ با توجه به فرض سؤال، $b > ۰$ است، پس نمودار $y = Cos\,x$ به‌اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ به‌سمت چپ آمده است و طول نقاط در $\frac{۱}{b}$ ضرب شده است.

از طرفی نقطهٔ $(-\frac{\pi}{۶}, ۰)$ مینیمم تابع است، پس ضریب $Cos(bx+\frac{\pi}{۳})$، یعنی a، عددی منفی است. (دقت کنید تابع در همسایگی $x = ۰$، صعودی است، پس نمودار $y = Cos(bx+\frac{\pi}{۳})$ نسبت به محور xها قرینه شده است و $a < ۰$) حال داریم:

$$\begin{cases} max = |a| + c = ۴ \\ min = -|a| + c = ۰ \end{cases} \Rightarrow c = ۲ \;,\; |a| = ۲ \xrightarrow{a<۰} a = -۲$$

بنابراین: $f(x) = ۲ - ۲Cos(bx+\frac{\pi}{۳})$ و از طرفی $f(-\frac{\pi}{۶}) = ۰$؛ بنابراین:

$$f(-\frac{\pi}{۶}) = ۲ - ۲Cos(-\frac{b\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}) = ۰ \Rightarrow Cos(-\frac{b\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳}) = ۱ \Rightarrow -\frac{b\pi}{۶}+\frac{\pi}{۳} = ۰ \Rightarrow \frac{b}{۲} = ۱ \Rightarrow b = ۲$$

پس $a = -۲$، $c = ۲$ و $b = ۲$ و خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$a(c+b) = -۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸۸ می‌دانیم تابع $y=\tan x$ در هر بازه‌ای که تعریف‌شده باشد، اکیداً صعودی است. تابع $y=\tan x$ در بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$، $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ و ... و در هر دو حالت کلی در بازهٔ $(\frac{۲k-۱}{۲}\pi,\frac{۲k+۱}{۲}\pi)$ تعریف شده است. پس داریم:

$$\frac{۲k-۱}{۲}\pi<\frac{\pi}{۳}x-\frac{\pi}{۴}<\frac{۲k+۱}{۲}\pi \xrightarrow{\div\pi} \frac{۲k-۱}{۲}<\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۴}<\frac{۲k+۱}{۲} \Rightarrow k-\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۴}<k+\frac{۱}{۲}$$

$$\xrightarrow{+\frac{۱}{۴}} k-\frac{۱}{۴}<\frac{۱}{۳}x<k+\frac{۳}{۴} \xrightarrow{\times۳} ۳k-\frac{۳}{۴}<x<۳k+\frac{۹}{۴}$$

اکنون با توجه به گزینه‌ها داریم:

$$k=۰ \Rightarrow -\frac{۳}{۴}<x<\frac{۹}{۴}$$

چون بازهٔ داده‌شده بازهٔ $(-\alpha,\alpha)$ است، پس حداکثر α برابر $\frac{۳}{۴}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸۹ ابتدا داریم:

$$\sin^۴\alpha+\cos^۴\alpha=\frac{۲}{۳} \Rightarrow (\underbrace{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}_{۱})^۲-۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۲}{۳} \Rightarrow -۲\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۲}{۳}-۱$$

$$\Rightarrow \sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۶}$$

با توجه به اینکه $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$، داریم:

$$\sin^۲\alpha\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha \Rightarrow \frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۴}\sin^۲ ۲\alpha \Rightarrow \sin^۲ ۲\alpha=\frac{۲}{۳}$$

حال داریم:

$$\cos ۴\alpha=۱-۲\sin^۲ ۲\alpha \Rightarrow \cos ۴\alpha=۱-۲(\frac{۲}{۳})=-\frac{۱}{۳}$$

$$\cos ۸\alpha=۲\cos^۲ ۴\alpha-۱ \Rightarrow \cos ۸\alpha=۲(-\frac{۱}{۳})^۲-۱=-\frac{۷}{۹}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۰ با توجه به نکات داریم:

$$\cos 2x - 2\sin 2x \sin x = 1 \Rightarrow (1-2\sin^2 x) - 2(2\sin x \cos x)\sin x = 1$$

$$\Rightarrow -2\sin^2 x - 4\sin^2 x \cos x = 0 \Rightarrow -2\sin^2 x(1+2\cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ 1+2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

اکنون با مقداردهی به $k \in \mathbb{Z}$، مقادیر x را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ به‌دست می‌آوریم:

$$x = k\pi \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

پس مجموع جواب‌های معادله برابر 5π و اولین جواب مثبت معادله برابر $\frac{2\pi}{3}$ است و خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\frac{5\pi}{\frac{2\pi}{3}} = 7/5$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۱ ابتدا با توجه به اینکه $\sin(x-\frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}-x)$، داریم:

$$-4\cos(x+\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{6}-x) = -1 \Rightarrow 4\cos(x+\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{6}-x) = 1$$

حال با فرض $x+\frac{\pi}{3} = \alpha$ و $\frac{\pi}{6}-x = \beta$، داریم:

$$\alpha+\beta = x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta = \cos\alpha \quad (*)$$

بنابراین:

$$4\underbrace{\cos(x+\frac{\pi}{3})}_{\alpha}\underbrace{\sin(\frac{\pi}{6}-x)}_{\beta} = 1 \xrightarrow{(*)} 4\cos\alpha\cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$$

باید معادله‌های $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$ را حل کنیم:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \\ x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi-\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi-\frac{2\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x = 0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$$

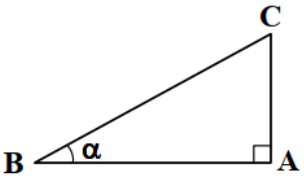
$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi+\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi+\frac{\pi}{3} \\ x+\frac{\pi}{3} = 2k\pi-\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi-\pi \end{cases} \xrightarrow{x\in[0,2\pi]} x = \frac{\pi}{3}, \pi$$

پس معادله ۵ جواب در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

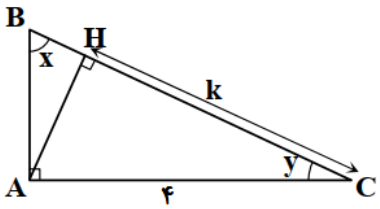
۳۹۲ نکته: مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زوایای حادهٔ آن α باشد را در نظر بگیرید. چهار نسبت مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ α به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:



$$\text{کسینوس}: \cos\alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} \qquad \text{سینوس}: \sin\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\text{کتانژانت}: \cot\alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} \qquad \text{تانژانت}: \tan\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$

ابتدا شکل را نام‌گذاری می‌کنیم. در مثلث ACH داریم:



$$\cos y = \frac{CH}{AC} = \frac{k}{۴} \Rightarrow k = ۴\cos y$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۳ نکتهٔ ۱: اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آنگاه: $x^۲ + y^۲ = ۱$

نکتهٔ ۲: اگر نقطهٔ $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی متناظر با زاویهٔ θ باشد، آنگاه: $\tan\theta = \frac{y}{x}$

ابتدا مقدار y را پیدا می‌کنیم. توجه کنید که در ربع چهارم عرض نقاط، اعدادی منفی هستند.

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow (\frac{۲۴}{۲۵})^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۱ - \frac{۵۷۶}{۶۲۵} \Rightarrow y^۲ = \frac{۶۲۵ - ۵۷۶}{۶۲۵} \Rightarrow y^۲ = \frac{۴۹}{۶۲۵} \Rightarrow y = \pm\frac{۷}{۲۵} \xrightarrow{y<۰} y = -\frac{۷}{۲۵}$$

اکنون به محاسبهٔ $\tan\alpha$ می‌پردازیم:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{۷}{۲۵}}{\frac{۲۴}{۲۵}} = -\frac{۷}{۲۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۴ چون مجموع دو زاویهٔ $\frac{\pi}{۸} + x$ و $\frac{۳\pi}{۸} - x$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است، پس این دو زاویه متمم‌اند:

$$\cos(\frac{۳\pi}{۸} - x) = \sin(\frac{\pi}{۸} + x) \Rightarrow A = ۴\cos ۳x + ۰$$

با جایگذاری $x = \frac{\pi}{۱۲}$ در عبارت داریم:

$$A = ۴\cos ۳(\frac{\pi}{۱۲}) = ۴ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۵

$$y = c + a\cos x \rightarrow T = ۲\pi$$

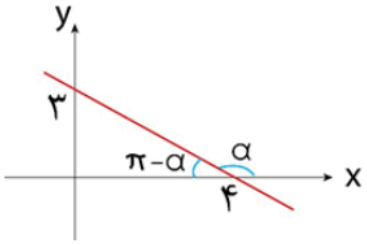
باتوجه به شکل:

$$x_B - x_A = \frac{۳}{۲}T = \frac{۳}{۲}(۲\pi) = ۳\pi \rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^۲ + (y_B - y_A)^۲}$$

$$AB = \sqrt{(۳\pi)^۲ + (۱ - \frac{۱}{۲})^۲} = \sqrt{۹\pi^۲ + \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳۶\pi^۲ + ۱}}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۶ باتوجه به شکل:



$$\tan(\pi-\alpha)=\frac{۳}{۴}$$

از روابط مثلثاتی می‌دانیم $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ است، پس $\tan\alpha=-\frac{۳}{۴}$ است. حال خواهیم داشت:

$$\sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)=\cos\alpha=-\frac{۴}{۵}$$

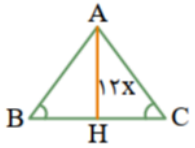
$$\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)=-\sin\alpha=-\frac{۳}{۵}$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=\cot\alpha=-\frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin(\frac{۹\pi}{۲}+\alpha)\cos(\frac{۷\pi}{۲}-\alpha)-\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha)=(-\frac{۴}{۵})(-\frac{۳}{۵})+\frac{۴}{۳}=\frac{۳۶+۱۰۰}{۷۵}=\frac{۱۳۶}{۷۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۷ فرض کنید $AH=۱۲x$ باشد.



$$\tan B=\frac{۳}{۴}=\frac{۱۲x}{BH}\Rightarrow BH=۱۶x\Rightarrow AB=۲۰x$$

$$\tan C=\frac{۱۲}{۵}=\frac{۱۲x}{HC}\Rightarrow HC=۵x\Rightarrow AC=۱۳x$$

$$\text{محیط}=۱۸=۱۳x+۲۰x+۲۱x=۵۴x\Rightarrow x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BC=۲۱x=۷$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۸

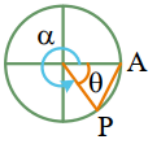
$$A=۲m\sin(۱۸۰^\circ+۱۸^\circ)-۳\cos(۲۷۰^\circ-۱۸^\circ)=-۲m\sin۱۸^\circ+۳\sin۱۸^\circ$$

$$B=۲\sin(۱۸۰^\circ-۱۸^\circ)+۳m\cos(۹۰^\circ+۱۸^\circ)=۲\sin۱۸^\circ-۳m\sin۱۸^\circ$$

$$A=B\Rightarrow -۲m+۳=۲-۳m\Rightarrow m=-۱$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۹۹ اگر $P(x,y)$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، آن‌گاه $x^۲+y^۲=۱$ است.



$$x^۲+(۱-۲x)^۲=۱\Rightarrow ۵x^۲-۴x=۰\Rightarrow x=\frac{۴}{۵}$$

پس $P(\frac{۴}{۵},-\frac{۳}{۵})$ است.

$$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{۴}{۵}\\ \sin\alpha=-\frac{۳}{۵}\end{cases}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\times OA\times OP\times\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۱\times۱\times\frac{۳}{۵}=\frac{۳}{۱۰}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۰

$$\tan(x-\frac{۳\pi}{۲})=-\cot x=۲\Rightarrow \cot x=-۲$$

$$۱+\cot^۲ x=\frac{۱}{\sin^۲ x}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۵}$$

$$\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x=\frac{۳}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۱

$$۲\sin x+۲\cos x=۳\sqrt{۵}\sin x\cos x$$

به توان ۲: $۴\sin^۲ x+۴\cos^۲ x+۸\sin x\cos x=۴۵\sin^۲ x\cos^۲ x\Rightarrow ۴+۸\sin x\cos x=۴۵\sin^۲ x\cos^۲ x$

$$\sin x\cos x=t\Rightarrow ۴۵t^۲-۸t-۴=۰\Rightarrow t=\frac{۴+\sqrt{۱۹۶}}{۴۵}\Rightarrow t=\frac{۲}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۲ فرض کنید $\alpha+\frac{\pi}{۴}=x$ باشد، پس:

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{۴})\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})=\frac{۲۱}{۲۵}\Rightarrow \sin x\cos(x-\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴})=\frac{۲۱}{۲۵}\Rightarrow \sin x\cos(x-\frac{\pi}{۲})=\frac{۲۱}{۲۵}$$

$$\Rightarrow \sin x\sin x=\frac{۲۱}{۲۵}\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۲۱}{۲۵}$$

$$\cos ۲x=۱-۲\sin^۲ x=۱-\frac{۴۲}{۲۵}=-\frac{۱۷}{۲۵}=-۰/۶۸\Rightarrow \cos\left(۲\alpha+\frac{\pi}{۲}\right)=-\sin ۲\alpha=-۰/۶۸\Rightarrow \sin ۲\alpha=۰/۶۸$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۳

$$P=\frac{-۲\cos\alpha-\cos\alpha}{-\cos\alpha+۳\sin\alpha}=\frac{۳\cos\alpha}{\cos\alpha-۳\sin\alpha}$$

$$\cos\alpha=\frac{۳}{۵}\Rightarrow P=\frac{\frac{۹}{۵}}{\frac{۳}{۵}-\frac{۱۲}{۵}}=-۱$$

$$\cos\alpha=-\frac{۳}{۵}\Rightarrow P=\frac{-\frac{۹}{۵}}{-\frac{۳}{۵}-\frac{۱۲}{۵}}=\frac{۳}{۵}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۴

$$\sqrt{۱+\tan^۲\alpha}+\tan\alpha=\sqrt{\frac{۱}{\cos^۲\alpha}}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۱}{|\cos\alpha|}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

پس $\cos\alpha$ منفی است و چون $\sin\alpha\cos\alpha<۰$ است، پس $\sin\alpha$ مثبت است و α در ناحیه دوم است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۵

$$\frac{۱+\frac{\cos x}{\sin x}}{۱+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{۲\sin\frac{ax}{۲}\cos\frac{ax}{۲}}{۲\sin^۲\frac{ax}{۲}}\Rightarrow \frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}=\cot\frac{ax}{۲}\Rightarrow \cot x=\cot\frac{ax}{۲}$$

به شرطی این تساوی، اتحاد است که $a=۲$ باشد.

$$\sin^۲\frac{a\pi}{۶}=\sin^۲\frac{\pi}{۳}=\frac{۳}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۶

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x = ۱ + \sin x$$

$$\Rightarrow -۲\sin^۲ x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = \pi \\ \sin x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ مجموع $= ۴\pi$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۷

$$\sin(۲x + \frac{\pi}{۳}) = -\sin ۲x = \sin(-۲x) \Rightarrow \begin{cases} ۲x + \frac{\pi}{۳} = -۲x + ۲k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{۱۲} + \frac{k\pi}{۲} \\ ۲x + \frac{\pi}{۳} = \pi + ۲x + ۲k\pi \times \end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ برابر $\frac{۵\pi}{۱۲}$، $\frac{۱۱\pi}{۱۲}$، $\frac{۱۷\pi}{۱۲}$ و $\frac{۲۳\pi}{۱۲}$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۸

$$T = ۲\pi = \frac{\pi}{\left|\frac{۱}{a}\right|} \Rightarrow |a| = ۲$$

چون $f(۰) < ۰$ است، پس $a = -۲$ است.

$$f(x) = ۱ - ۲\cos^۲(\frac{x}{۲}) = -\cos x$$

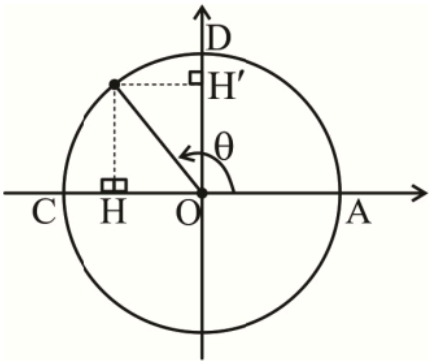
$$f(\frac{a\pi}{۳}) = f(\frac{-۲\pi}{۳}) = -\cos(-\frac{۲\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۰۹

گزینه ۱ درست است.

با توجه به تعریف سینوس و کسینوس در دایره مثلثاتی:



$$CH = OC - OH = ۱ + \cos\theta$$

$$DH' = OD - OH' = ۱ - \sin\theta$$

$$\Rightarrow CH - DH' = ۱ + \cos\theta - (۱ - \sin\theta) = \sin\theta + \cos\theta$$

حالا از $\sin\theta = \frac{۲۴}{۲۵}$ نتیجه می‌شود: $\cos\theta = \pm\sqrt{۱ - \sin^۲\theta} = \pm\frac{۷}{۲۵}$ و چون θ در ربع دوم است: $\cos\theta = \frac{-۷}{۲۵}$

و جواب می‌شود:

$$\frac{۲۴}{۲۵} + (-\frac{۷}{۲۵}) = \frac{۱۷}{۲۵} = ۰/۶۸$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۰ گزینه ۴ درست است.

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{\frac{۳}{۵}}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}\cos^۲\alpha+\sin^۲\alpha+\sin^۲\alpha\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow ۲\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۳}{۵}-۱=\frac{-۲}{۵}\xrightarrow{\div ۲}\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-۱}{۵}$$

از طرف دیگر:

$$A=\sqrt{\tan^۲\alpha}+\sqrt{\cot^۲\alpha}=|\tan\alpha|+|\cot\alpha|$$

چون ضرب سینوس و کسینوس منفی است، پس تانژانت و کتانژانت هم منفی‌اند و داریم:

$$A=-\tan\alpha-\cot\alpha=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-۱}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{-۱}{\frac{-۱}{۵}}=۵$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۱ گزینه ۱ درست است.

$$\tan^۲x-\sin^۲x-\tan^۲x\sin^۲x$$
$$=\tan^۲x-\sin^۲x(۱+\tan^۲x)$$

از $\sin^۲x$ فاکتور می‌گیریم:

با توجه به رابطه $۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$ داریم:

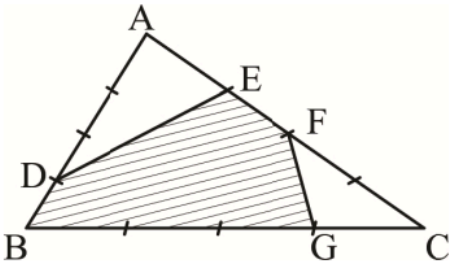
$$=\tan^۲x-\sin^۲x\left(\frac{۱}{\cos^۲x}\right)$$

$$=\tan^۲x-\sin^۲x\left(\frac{+۱}{\cos^۲x}\right)=\tan^۲x-\tan^۲x=۰$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۲ **گزینه ۲ درست است.**

نسبت مساحت مثلث‌های CFG, ADE به مثلث ABC را حساب می‌کنیم:



$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}AD.AE.\sin\hat{A}}{\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin\hat{A}} = \frac{۳\times۱}{۴\times۴} = \frac{۳}{۱۶}$$

$$\frac{S_{CFG}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲}CF.CG.\sin\hat{C}}{\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin\hat{A}} = \frac{۲\times۱}{۴\times۴} = \frac{۲}{۱۶}$$

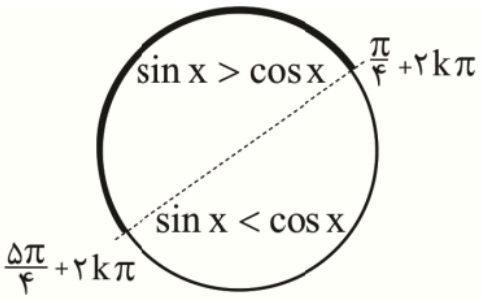
پس روی هم $\frac{۵}{۱۶}$ مساحت مثلث ABC هاشور نخورده و نسبت مساحت هاشور به کل می‌شود $۱-\frac{۵}{۱۶}=\frac{۱۱}{۱۶}$. یعنی

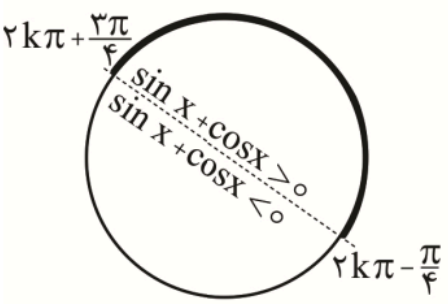
$$\frac{۱۱}{۱۶} = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۱۶} = \%۷۵ - \%۶/۲۵ = \text{درصد } ۶۸/۷۵$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۳ **گزینه ۱ درست است.**

در دایرهٔ مثلثاتی ناحیه‌هایی که $\sin x > \cos x, \sin x + \cos x > ۰$ را مشخص می‌کنیم.



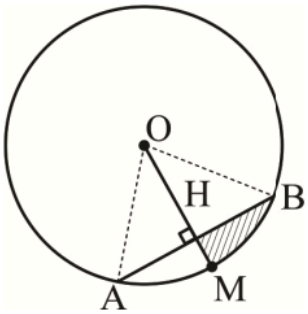


اشتراک دو ناحیه $۲k\pi+\frac{\pi}{۴} < x < ۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}$ است. $(k\in z)$ $-\frac{۵\pi}{۳}$ در این ناحیه قرار دارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۴ **گزینه ۲ درست است.**

با دقت به ابعاد داده‌شده؛ داریم:



$$\left.\begin{matrix} r = OA = OB = \sqrt{۲} \\ AB = ۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\hat{O}B = ۹۰^\circ \Rightarrow M\hat{O}B = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow HO = HB = r\sin ۴۵^\circ = \sqrt{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱$$

$$\Rightarrow MH = OM - OH = \sqrt{۲} - ۱$$

طول کمان BM برابر است با:

$$L = r\alpha = \sqrt{۲} \times \frac{\pi}{۴} = \frac{\pi\sqrt{۲}}{۴}$$

پس محیط ناحیه هاشور زده‌شده برابر است با:

$$HM + BH + \overset{\frown}{BM}$$

$$= \sqrt{۲} - ۱ + ۱ + \frac{\pi\sqrt{۲}}{۴} = \sqrt{۲} + \frac{\pi}{۴}\sqrt{۲} = \sqrt{۲}(\frac{\pi}{۴} + ۱)$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۵ **گزینه ۳ درست است.**

$$\frac{\overset{\text{دوم}}{\sin(\pi - \alpha)} - \overset{\text{چهارم}}{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲})}}{\frac{۱}{\underset{\text{دوم}}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{۲})}} + \underset{\text{سوم}}{\sin(\alpha - \pi)}} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\frac{۱}{\cos\alpha} - \sin\alpha}$$

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha$ تقسیم کنیم:

$$= \frac{\tan\alpha + ۱}{\frac{۱}{\cos^۲\alpha} - \tan\alpha} = \frac{\tan\alpha + ۱}{(۱ + \tan^۲\alpha) - \tan\alpha} \xrightarrow{\tan\alpha = ۲} = \frac{۲ + ۱}{۱ + ۲^۲ - ۲} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۶ **گزینه ۳ درست است.**

$$f(۶/۱)+f(۳/۲)-f(-۱/۹)=f(۴+۲/۱)+f(۴-۰/۸)-f(-۴+۲/۱)$$

با توجه به تعریف دوره تناوب اجازه داریم مضارب صحیح ۴ را حذف کنیم:

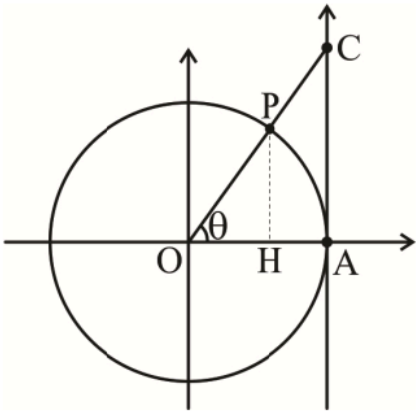
$$=F(۲/۱)+f(-۰/۸)-f(۲/۱)=f(-۰/۸)$$

و همچنین اجازه داریم مضارب صحیح ۴ را اضافه کنیم:

$$=f(-۰/۸+۲\times۴)=f(۷/۲)$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

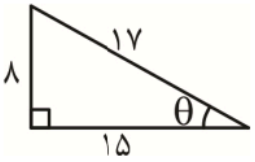
۴۱۷ **گزینه ۴ درست است.**



می‌دانیم:

$$AC=\tan\theta$$

با توجه به مثلث روبه‌رو:



$$\sin\theta=\frac{۸}{۱۷}\Rightarrow\tan\theta=\frac{۸}{۱۵}$$

همچنین در مثلث AOC داریم:

$$\cos\theta=\frac{AO}{OC}=\frac{۱}{۱+PC}=\frac{۱۵}{۱۷}$$

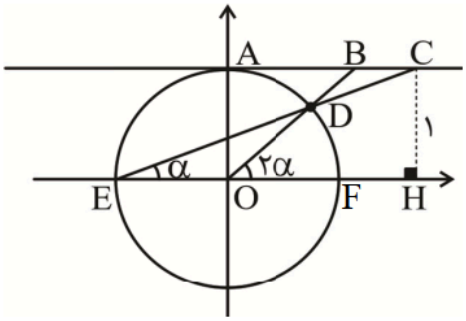
$$\Rightarrow ۱+PC=\frac{۱۷}{۱۵}\Rightarrow PC=\frac{۱۷}{۱۵}-۱=\frac{۲}{۱۵}$$

$$\Rightarrow AC-CP=\frac{۸}{۱۵}-\frac{۲}{۱۵}=\frac{۶}{۱۵}=۰/۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۸

گزینه ۲ درست است.



از نقطهٔ C عمودی بر محور xها رسم می‌کنیم. در مثلث ECH داریم:

$$\tan\alpha=\frac{۱}{EH}\rightarrow EH=\cot\alpha$$

طول پاره‌خط AC یا همان OH برابر $\cot\alpha-۱$ است.

از طرفی زاویهٔ $H\hat{O}B$ برابر ۲α است. طول پاره‌خط AB برابر $\cot ۲\alpha$ است. برای محاسبهٔ طول پاره‌خط BC داریم:

$$BC=AC-AB=(\cot\alpha-۱)-\cot ۲\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}-\frac{۱}{\tan ۲\alpha}-۱=$$

$$\frac{۲}{۲\tan\alpha}-\frac{۱}{\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}}-۱=\frac{۲}{۲\tan\alpha}-\frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۲\tan\alpha}-۱=$$

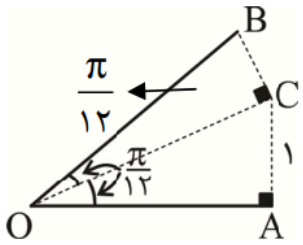
$$\frac{۱+\tan^{۲}\alpha}{۲\tan\alpha}-۱=\frac{۱}{\sin ۲\alpha}-۱\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۱۰}}\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۵}}-۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱۹

گزینه ۲ درست است.

در مثلث AOC طول AC برابر ۱ واحد است.



$$\sin\frac{\pi}{۱۲}=\frac{AC}{OC}\rightarrow\sin\frac{\pi}{۱۲}=\frac{۱}{OC}\rightarrow OC=\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۱۲}}$$

در مثلث OBC نیز داریم:

$$\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{OC}{OB}\rightarrow\cos\frac{\pi}{۱۲}=\frac{\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۱۲}}}{OB}\rightarrow OB=\frac{۱}{\sin\frac{\pi}{۱۲}.\cos\frac{\pi}{۱۲}}\rightarrow OB=\frac{۲}{\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۰ **گزینه ۴ درست است.**

به کمک اتحاد مثلثاتی $\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$ نسبت کسینوس ۴α را بسط می‌دهیم.

$$\cos ۴\alpha = ۲\cos^۲ ۲\alpha - ۱ = ۲(۲\cos^۲\alpha - ۱)^۲ - ۱ = ۲(۴\cos^۴\alpha - ۴\cos^۲\alpha + ۱) - ۱$$

$$= ۸\cos^۴\alpha - ۸\cos^۲\alpha + ۱ = a\cos^n x + b\cos^{n-۲} x + c$$

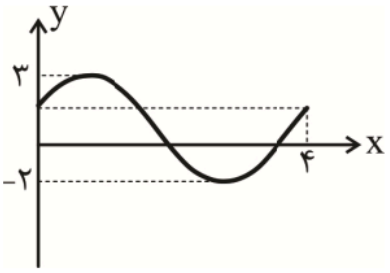
درنتیجه $n = ۴, a = +۸, b = -۸, c = ۱$ و مقدار خواسته‌شده برابر است با:

$$\left[\frac{a - b + c}{n}\right] = \left[\frac{۸ - (-۸) + ۱}{۴}\right] = \left[\frac{۱۷}{۴}\right] = ۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۱ **گزینه ۱ درست است.**

$$\begin{cases} y_{max} = |a| + c = ۳ \\ y_{min} = -|a| + c = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{۵}{۲} \\ c = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$



با توجه به شکل نمودار از نوع $+\sin x$ است، پس a, b هم علامت‌اند و می‌توانیم $a > ۰$ بگیریم؛ پس $a = \frac{۵}{۲}$ و داریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = ۴ \xrightarrow{b>۰} b = \frac{\pi}{۲}$$

پس $f(x) = \frac{۵}{۲}\sin\frac{\pi x}{۲} + \frac{۱}{۲}$ و داریم:

$$f(\frac{۲۳}{۴}) = \frac{۵}{۲}\sin\frac{۲۳\pi}{۸} + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}\sin(۳\pi - \frac{\pi}{۸}) + \frac{۱}{۲}$$

$$= \frac{۵}{۲}\sin\frac{\pi}{۸} + \frac{۱}{۲}$$

می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{۸} = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۲}$

چون:

$$\sin^۲\frac{\pi}{۸} = \frac{۱ - \cos\frac{\pi}{۴}}{۲} = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۲}}{۴}$$

پس جواب می‌شود: $\frac{۵\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۴} + ۲/۵$ که به اندازهٔ $\frac{۵\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}}{۴}$ از $۰/۵$ بیشتر است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۲ گزینه ۲ درست است.

باید توجه داشته باشیم:

$$\sin ۲x = \cos ۳x$$

$$\cos ۳x = \cos(\frac{\pi}{۲} - ۲x)$$

پس:

$$۳x = ۲k\pi \pm (\frac{\pi}{۲} - ۲x) \Rightarrow \begin{cases} ۵x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \rightarrow x = \frac{۲k\pi + \frac{\pi}{۲}}{۵} = \frac{(۴k+۱)\pi}{۱۰} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

جواب کلی کسینوسی :

در فاصله $(۰, ۴\pi)$ به‌ازای $k = ۰$ تا $k = ۹$ از جواب بالایی x به‌دست می‌آید، یعنی ۱۰ جواب. از پایینی هم به‌ازای $k = ۱$ و $k = ۲$ به جواب‌های $\frac{۳\pi}{۲}$ و $\frac{۷\pi}{۲}$ می‌رسیم که در بالایی به‌دست نمی‌آیند. پس روی هم ۱۲ جواب داریم.

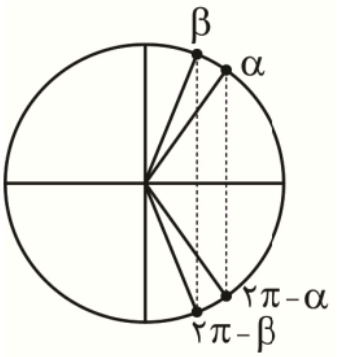
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۳ گزینه ۴ درست است.

$$۷ - ۶\sin^۲ x = ۵\cos x$$

$$\text{جایگذاری فرمول} \rightarrow ۷ - ۶(۱ - \cos^۲ x) = ۵\cos x \xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} ۶\cos^۲ x - ۵\cos x + ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کنیم}} (۲\cos x - ۱)(۳\cos x - ۱) = ۰ \rightarrow \cos x = \frac{۱}{۲} \text{ یا } \frac{۱}{۳}$$



می‌دانیم هر مقدار مثبت برای کسینوس در فاصله $(۰, ۲\pi)$ دوبار رخ می‌دهد. یکی در α و دیگری در $۲\pi - \alpha$ که جمع آن‌ها ۲π است، پس جمع کل می‌شود ۴π.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۴ گزینه ۱ درست است.

$$\sin ۵x + \cos x = ۰ \rightarrow \sin ۵x = -\cos x = \sin(\frac{۳\pi}{۲} - x)$$

$$\xrightarrow{\text{جواب کلی سینوسی}} \begin{cases} ۵x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} - x \Rightarrow ۶x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \\ ۵x = ۲k\pi + \pi - (\frac{۳\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} \end{cases}$$

در $(۰,\pi)$ از بالایی جواب‌های $\frac{۷\pi}{۸}, \frac{۳\pi}{۸}$ را داریم که بیشترین و کمترین جواب و از پایینی جواب‌های $\frac{۳\pi}{۱۲}, \frac{۷\pi}{۱۲}, \frac{۱۱\pi}{۱۲}$ روی هم $\frac{۳\pi}{۱۲} + \frac{۱۱\pi}{۱۲}$ یعنی $\frac{۱۴\pi}{۱۲}$ یا $\frac{۷\pi}{۶}$ می‌شوند.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۵ گزینه ۳ درست است.

با استفاده از اتحاد مثلثاتی کمان‌های ۲α معادله را به‌صورت ساده‌تری در می‌آوریم:

$$۳\cos mx = ۲\cos ۲x - ۴\cos^۲ x \rightarrow$$

$$۳\cos mx = ۲(۲\cos^۲ x - ۱) - ۴\cos^۲ x \rightarrow ۳\cos mx = ۴\cos^۲ x - ۲ - ۴\cos^۲ x$$

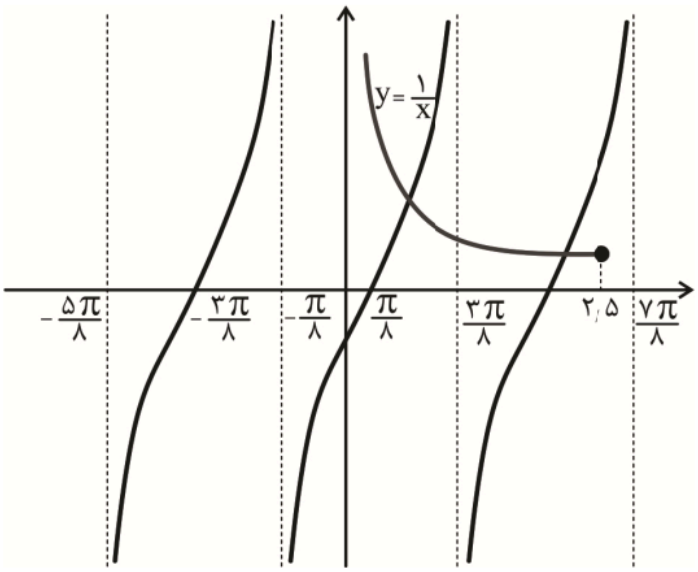
$$\rightarrow ۳\cos mx = -۲ \rightarrow \cos mx = -\frac{۲}{۳}$$

این معادله روی بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای $۲m$ ریشه است؛ پس $۲m = ۶$ و درنتیجه $m = ۳$ است. در این معادله m می‌تواند -۳ نیز باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۶ **گزینه ۲ درست است.**

برای رسم تابع $y=\tan(۲x-\frac{\pi}{۴})$ ابتدا با نصف کردن طول‌های نمودار تابع $y=\tan x$ نمودار $y=\tan ۲x$ را رسم می‌کنیم، سپس آن را $\frac{\pi}{۸}$ به‌سمت راست انتقال می‌دهیم. سپس نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را روی بازهٔ $(۰,۲/۵]$ رسم می‌کنیم.



طبق شکل، نمودارها در دو نقطه متقاطع‌اند.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۷ با توجه به نمودار داده‌شده، متوجه می‌شویم تابع $y=-۲+k\tan(k\pi x+\frac{\pi}{۳})$ در $x=۰$، برابر -۳ هست، پس داریم:

$$-۳=-۲+k\tan(۰+\frac{\pi}{۳})\Rightarrow -۱=k\times\sqrt{۳}\Rightarrow k=-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\Rightarrow [k]=-۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۸ با توجه به معادله داده‌شده و تغییر متغیر داریم:

$$۹\cos^۳ x+\cos x=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow ۲۷\cos^۳ x+۳\cos=۱۰\xrightarrow{۳\cos x=t} t^۳+t=۱۰$$

$$\xrightarrow{\text{حدس ریشه}} t=۲\Rightarrow (t-۲)\overbrace{(t^۲+۲t+۵)}^{\Delta<۰}=۰\Rightarrow t=۳\cos x=۲\Rightarrow \cos x=\frac{۲}{۳}$$

می‌دانیم در $x=\frac{\pi}{۴}$، مقادیر $\sin x$ و $\cos x$ با یکدیگر برابر و تقریباً برابر با $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\approx \frac{۱/۴}{۲}=۰/۷$ است، با توجه به اینکه $\frac{۲}{۳}\approx ۰/۶۶$ از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ کوچک‌تر است، نتیجه می‌گیریم $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$.

همچنین جواب‌های $\cos x=k$ در بازه $[۰,۲\pi]$ برابر a و $۲\pi-a$ است که مجموعشان برابر ۲π است. از آنجا که در بازهٔ $[۲\pi,۳\pi]$ معادله $\cos x=\frac{۲}{۳}$ تنها یک ریشه بین $۲\pi+\frac{\pi}{۴}$ و $۲\pi+\frac{\pi}{۲}$ دارد، مجموع ریشه‌ها باید از $۴\pi+\frac{\pi}{۴}$ بزرگ‌تر و از $۴\pi+\frac{\pi}{۲}$ کوچک‌تر باشد: $\frac{۱۷\pi}{۴}<\text{مجموع}<\frac{۹\pi}{۲}$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ درست است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۹

$$\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x=\frac{۵}{۸}\Rightarrow \frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲x\Rightarrow \sin^۲ ۲x=\frac{۳}{۴}=\sin^۲\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۶}$$

در فاصله $[\pi,۳\pi]$ داریم:

k	$\overbrace{۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۵}^{\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}}$	$\overbrace{۳ \quad ۴ \quad ۵ \quad ۶}^{\frac{k\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶}}$
x	$\pi+\frac{\pi}{۶} \quad \frac{۳\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶} \quad ۲\pi+\frac{\pi}{۶} \quad \frac{۵\pi}{۲}+\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶} \quad ۲\pi-\frac{\pi}{۶} \quad \frac{۵\pi}{۲}-\frac{\pi}{۶} \quad ۳\pi-\frac{\pi}{۶}$

پس جمع کل ریشه‌ها می‌شود: ۱۶π

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۰ x و y دو زاویه حاده‌اند و $\tan x \times \tan y = ۱$، پس:

$$\tan x = \frac{۱}{\tan y} \Rightarrow \tan x = \cot y$$

یعنی x و y متمم هم هستند و $\sin y = \cos x$، پس به‌جای رابطهٔ $\sin x - \sin y = \frac{۲}{۳}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\sin x - \cos x = \frac{۲}{۳}$$

حالا طرفین این عبارت را به توان دو می‌رسانیم:

$$\underbrace{\sin^۲ x + \cos^۲ x}_{۱} - ۲\sin x \cos x = \frac{۴}{۹} \Rightarrow ۲\sin x \cos x = \frac{۵}{۹} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۵}{۱۸}$$

مقدار $\sin x + \cos x$ را محاسبه می‌کنیم:

$$(\sin x + \cos x)^۲ = \sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x \cos x = ۱ + \frac{۵}{۹} = \frac{۱۴}{۹}$$

$$\Rightarrow |\sin x + \cos x| = \frac{\sqrt{۱۴}}{۳} \xrightarrow{x \text{ در ربع اول}} \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{۱۴}}{۳}$$

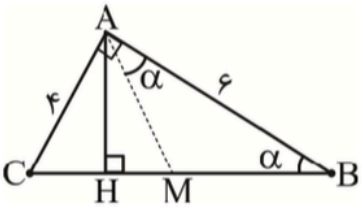
حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\sin^۳ x - \cos^۳ x}{\sin^۳ x + \cos^۳ x} = \frac{(\sin x - \cos x)\overbrace{(\sin^۲ x + \sin x \cos x + \cos^۲ x)}^{۱}}{(\sin x + \cos x)\underbrace{(\sin^۲ x - \sin x \cos x + \cos^۲ x)}_{۱}}$$

$$= \frac{\frac{۲}{۳}(۱ + \frac{۵}{۱۸})}{\frac{\sqrt{۱۴}}{۳}(۱ - \frac{۵}{۱۸})} = \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{۲۳}{۱۸}}{\frac{\sqrt{۱۴}}{۳} \times \frac{۱۳}{۱۸}} = \frac{۲ \times ۲۳}{۱۳\sqrt{۱۴}} \times \frac{\sqrt{۱۴}}{\sqrt{۱۴}} = \frac{۲ \times ۲۳\sqrt{۱۴}}{۱۳ \times ۱۴} = \frac{۲۳\sqrt{۱۴}}{۱۳ \times ۷} = \frac{۲۳\sqrt{۱۴}}{۹۱}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۱ با توجه به‌شکل روبه‌رو با رسم ارتفاع AH و میانهٔ AM داریم:



$$AM = MB \Rightarrow \hat{MAB} = \hat{B} = \alpha$$

$$\text{زاویه خارجی } \hat{AMH} = ۲\alpha \Rightarrow \hat{HAM} = ۹۰ - ۲\alpha = ۹۰ - ۲\hat{B} = \hat{B} + \hat{C} - ۲\hat{B} = \hat{C} - \hat{B}$$

پس تانژانت زاویه HAM را می‌خواهیم که برابر است با:

$$\tan \hat{HAM} = \frac{HM}{AH}$$

از طرفی طبق روابط طولی داریم:

$$BC^۲ = \sqrt{۴^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۵۲}$$

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{۲۴}{\sqrt{۵۲}}$$

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow CH = \frac{AC^۲}{BC} = \frac{۱۶}{\sqrt{۵۲}}$$

$$HM = CM - CH = \frac{\sqrt{۵۲}}{۲} - \frac{۱۶}{\sqrt{۵۲}} = \frac{۲۰}{۲\sqrt{۵۲}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۵۲}}$$

بنابراین:

$$\tan \hat{HAM} = \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{۵}{۱۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۲ روش اول: عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$۲\left(\frac{۱}{۱+\tan \hat{B}} + \frac{۱}{۱+\tan \hat{A}}\right) + \frac{۱}{۲(۰)+۲} = ۲\left(\frac{۲ + \tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{۱ + \tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \underbrace{\tan \hat{A}.\tan \hat{B}}_{۱}}\right) + \frac{۱}{۲} = ۲(۱) + \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲}$$

روش دوم: $\hat{C} = ۹۰$ است و به‌جای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ زوایای دلخواهی که مجموعشان ۹۰° است، قرار می‌دهیم، مثلاً $\hat{A} = \hat{B} = ۴۵^\circ$، با جایگذاری این زوایا در عبارت موردنظر به عدد $\frac{۵}{۲}$ می‌رسیم.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

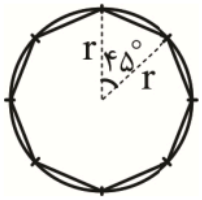
۴۳۳ با ساده کردن معادلهٔ مثلثاتی داریم:

$$\frac{\sin ۴x+\sin ۲x}{\sin ۲x}=\sin^۲ x+\cos^۲ x \Rightarrow \frac{\sin ۴x}{\sin ۲x}+\frac{\sin ۲x}{\sin ۲x}=۱ \Rightarrow \frac{۲\sin ۲x\cos ۲x}{\sin ۲x}=۰$$

$$\Rightarrow ۲\cos ۲x=۰ \Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۴



$$\text{مساحت ۸ ضلعی} = ۸\times \text{مساحت مثلث} = ۸\times\frac{۱}{۲}r^۲\sin ۴۵^\circ = ۲\sqrt{۲}r^۲$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^۲$$

$$\text{نسبت} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\pi}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۵

$$\frac{\cos(۲۷^\circ+۱۰^\circ)-\sin(۳\times ۱۸^\circ+۱۰^\circ)}{\cos(۳۶^\circ+۱۰^\circ)+۲\cos(۳۶^\circ+۹^\circ-۱۰^\circ)}$$

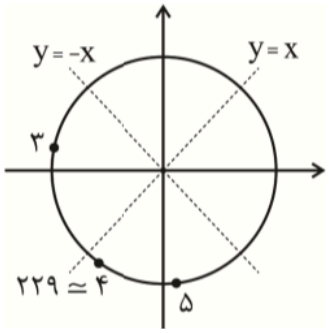
$$=\frac{\sin ۱۰^\circ+\sin ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ+۲\sin ۱۰^\circ}\xrightarrow[\div\cos ۱۰^\circ]{\div\cos ۱۰^\circ}\frac{۲\tan ۱۰^\circ}{۱+۲\tan ۱۰^\circ}=۰/۲۶=\frac{۱۳}{۵۰}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰\tan ۱۰^\circ=۱۳+۲۶\tan ۱۰^\circ \Rightarrow ۷۴\tan ۱۰^\circ=۱۳ \Rightarrow \tan ۱۰^\circ=\frac{۱۳}{۷۴} \Rightarrow \cot ۱۰^\circ=\frac{۷۴}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \text{براکت} = ۵$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۶



با توجه به ربع سوم و قرارگیری نیم‌سازها داریم:

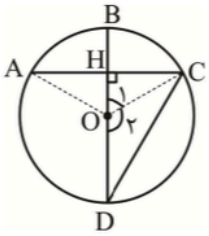
$$\tan ۴ > ۱ > \cot ۴ > ۰ > \cos ۴ > \sin ۴$$

۵ از ۴ پایین‌تر است پس sin آن کمتر است.

۳ در سمت چپ ۴ قرار دارد، پس کسینوس آن کمتر است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۷ با توجه به شکل مقابل داریم:



$$CH = AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}R$$

$$\overset{\Delta}{OCH} : \measuredangle o_۱ = ۶۰^\circ$$

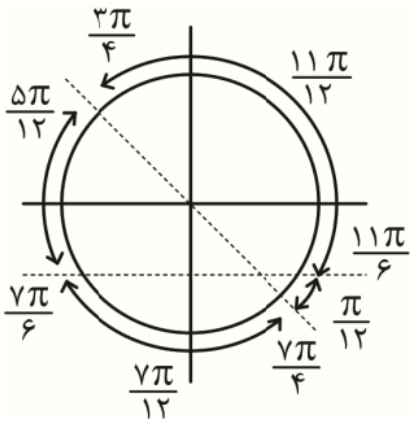
$$\Delta OCH : \begin{cases} OC = R \\ CH = R\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ OH = \frac{R}{۲} \end{cases}$$

$$HB = OB - OH = R - \frac{R}{۲} = \frac{R}{۲}$$

$$\frac{S_{ABH}}{S_{OCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}R\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times (R - \frac{R}{۲})}{\frac{۱}{۲}R \times R \times \sin O_۲} = \frac{\frac{۱}{۲}R\frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{R}{۲}}{\frac{۱}{۲}R \times R \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۸



$$۲\cos x + ۲\sin x = -۱ - \cot x$$

$$۲(\sin x + \cos x) = -(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}) \Rightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = ۰ \\ \sin x = -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

زاویه‌ها را در دور اول مشخص می‌کنیم. و فاصله‌های هر دو نقطهٔ متوالی را روی دایره نشان می‌دهیم:

$$\frac{\max}{\min} = \frac{\frac{۱۱\pi}{۱۲}}{\frac{\pi}{۱۲}} = ۱۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳۹ در مخرج عامل $(x-۲)$ داریم و حد تابع در $x=۲$ صفر شده است، پس صورت حتماً $(x-۲)^۲$ دارد. (دقت کنید که نمی‌تواند $(x-۲)^۳$ داشته باشد.) پس $x^۳+ax+b$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر است.

$$\begin{array}{r|l} x^۳+ax+b & x^۲-۴x+۴ \\ \cline{2-2} x^۳-۴x^۲+۴x & x+۴ \end{array}$$

$$۴x^۲+(a-۴)x+b$$

$$۴x^۲-۱۶x+۱۶ \quad \Rightarrow a=-۱۲\,,\ b=۱۶$$

$$۰$$

حالا برای حد دوم، گویا می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}{\sqrt{۲x+b}-\sqrt{۲x}}=\frac{x+a-x}{۲x+b-۲x}\times\frac{\sqrt{۲x+b}+\sqrt{۲x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

و در $+\infty$ نسبت جملات پرتوان برابر است با:

$$\frac{a}{b}\times\frac{۲\sqrt{۲x}}{۲\sqrt{x}}=\frac{-۱۲}{۱۶}\times\sqrt{۲}=\frac{-۳}{۴}\sqrt{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۰ در ابتدا داریم:

$$\frac{\sin ۱۰۰۰^\circ + \cos ۵۵^\circ}{۲\sin ۲۶^\circ - \cos ۱۰۰^\circ} \xrightarrow[\text{آن را کم می‌کنیم}]{۳۶۰^\circ \text{ و مضارب}} = \frac{\sin(-۸۰^\circ) + \cos ۱۹۰^\circ}{۲\sin ۲۶۰^\circ - \cos ۱۰۰^\circ}$$

$$\xrightarrow{\text{برحسب } ۱۰^\circ \text{ می‌نویسیم}} = \frac{-\sin(۹۰^\circ - ۱۰^\circ) + \cos(۱۸۰^\circ + ۱۰^\circ)}{۲\sin(۲۷۰^\circ - ۱۰^\circ) - \cos(۹۰^\circ + ۱۰^\circ)}$$

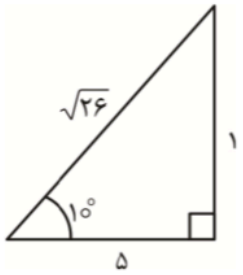
$$\Rightarrow \frac{-\cos ۱۰ - \cos ۱۰}{-۲\cos ۱۰ + \sin ۱۰} = \frac{۱۰}{۹} \Rightarrow -۹\cos ۱۰^\circ = -۱۰\cos ۱۰^\circ + ۵\sin ۱۰^\circ \Rightarrow \cos ۱۰^\circ = ۵\sin ۱۰^\circ$$

$$\Rightarrow \tan ۱۰^\circ = \frac{۱}{۵}$$

حالا برای محاسبهٔ $\sin ۷۰^\circ$ داریم:

$$\sin ۷۰^\circ = \cos ۲۰^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۰^\circ$$

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی برای $\tan ۱۰^\circ = \frac{۱}{۵}$ داریم:



$$\rightarrow \sin ۱۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۲۶}}$$

پس:

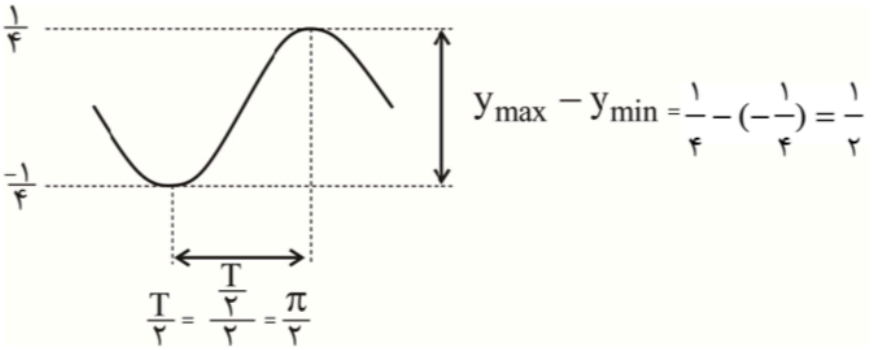
$$۱ - ۲\sin^۲ ۱۰^\circ = ۱ - ۲\left(\frac{۱}{\sqrt{۲۶}}\right)^۲ = \frac{۱۲}{۱۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۱ ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = -\sin\cos x\cos ۲x = -\frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x = \frac{-۱}{۴}\sin ۴x$$

واضح است که فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی از نمودار سینوسی، روی محور xها برابر با $\frac{T}{۲}$ و فاصلهٔ آن‌ها روی محور yها برابر با $y_{max} - y_{min}$ است.



$$y_{max} - y_{min} = \frac{۱}{۴} - (-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۲}$$

شیب خط واصل بین این دو نقطه برابر با $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۲}{\pi}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۲ باید معادلهٔ $\sin ۳x \cos ۲x = ۰$ را حل کنیم و البته حواسمان به ریشه‌های مخرج یعنی ریشه‌های معادلهٔ $\cos x + \cos ۲x = ۰$ هم باشد:

$$\begin{cases} \sin ۳x = ۰ \\ ۰ < ۳x < ۶\pi \end{cases}$$



$$\rightarrow x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}, \pi, \frac{۴\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} \cos ۲x = ۰ \\ ۰ < ۲x < ۴\pi \end{cases}$$



$$\rightarrow x = \frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴}, \frac{۵\pi}{۴}, \frac{۷\pi}{۴}$$

$$\cos ۲x + \cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ + \cos x = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$$

$$\xrightarrow{\cos x = t} ۲t^۲ + t - ۱ = ۰ \Rightarrow t = -۱, \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -۱ \rightarrow x = \pi \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \rightarrow x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳} \end{cases}$$

پس $\frac{\pi}{۳}$ و π و $\frac{۵\pi}{۳}$ به عنوان ریشه‌های مخرج از مجموعه جواب‌های بالا حذف می‌شوند و مجموع ریشه‌های باقی‌مانده برابر است با:

$$\frac{۲\pi}{۳} + \frac{۴\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} + \frac{۳\pi}{۴} + \frac{۵\pi}{۴} + \frac{۷\pi}{۴} = ۶\pi$$

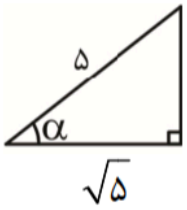
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۳ گزینه ۱ درست است.

با استفاده از فرض سؤال داریم:

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵} \xrightarrow{\text{حذف } ۲\pi} \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی داریم:



فیثاغورس: $۲\sqrt{۵} \rightarrow \sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

می‌دانیم که شیب هر خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. پس:

$$m_{f^{-۱}}=\tan ۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^{۲}\alpha-۱}=\frac{۲(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})(\frac{\sqrt{۵}}{۵})}{۲(\frac{\sqrt{۵}}{۵})^{۲}-۱}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=\frac{-۴}{۳}$$

می‌دانیم دو تابع خطی که وارون هم هستند، شیب‌های برعکس هم دارند، پس $m_f=\frac{-۳}{۴}$ نهایتاً داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|\frac{-۳}{۴}x+h|}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x+h}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x}{\frac{-۴}{۳}x}=\frac{۹}{۱۶}$$

دقت کنید که در محاسبهٔ $\lim_{x\to-\infty}|\frac{-۳}{۴}x+h|$، داخل قدرمطلق مثبت است و خود عبارت از قدرمطلق، بیرون آمده است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۴ گزینه ۲ درست است.

زوایای ۲۵° و ۶۵° متمم هم هستند، پس $\tan ۶۵^\circ = \cot ۲۵^\circ$ بنابراین:

$$A - B = \frac{\cot ۲۵^\circ}{\tan ۵۰^\circ} - \frac{\cot ۲۵^\circ}{\sin ۵۰^\circ} = \cot ۲۵^\circ \left(\frac{۱}{\tan ۵۰^\circ} - \frac{۱}{\sin ۵۰^\circ}\right)$$

$$\xrightarrow{\tan ۵۰^\circ = \frac{\sin ۵۰^\circ}{\cos ۵۰^\circ}} \cot ۲۵^\circ \left(\frac{\cos ۵۰^\circ}{\sin ۵۰^\circ} - \frac{۱}{\sin ۵۰^\circ}\right) = \cot ۲۵^\circ \left(\frac{\cos ۵۰^\circ - ۱}{\sin ۵۰^\circ}\right)$$

با استفاده از روابط ۲α داریم:

$$\begin{cases} \sin ۵۰^\circ = ۲\sin ۲۵^\circ \cos ۲۵^\circ \\ \cos ۵۰^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۲۵^\circ \end{cases}$$

پس داریم:

$$\cot ۲۵^\circ \left(\frac{\cos ۵۰^\circ - ۱}{\sin ۵۰^\circ}\right) = \frac{\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ} \left(\frac{۱ - ۲\sin^۲ ۲۵^\circ - ۱}{۲\sin ۲۵^\circ \cos ۲۵^\circ}\right) = \frac{\cos ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ} \left(\frac{-\sin^۲ ۲۵^\circ}{\sin ۲۵^\circ \cos ۲۵^\circ}\right) = -۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۵ گزینه ۱ درست است.

عرض از مبدأ خط $y = ۲x - ۳$ برابر با -۳ و طول از مبدأ آن $\frac{۳}{۲}$ است. با توجه به نمودار تابع، دوره تناوب تابع f برابر با $\frac{۳}{۲}$ و مقدار min آن برابر با -۳ است:

$$f(x) = a\sin\left(\pi(bx + \frac{۱}{۲})\right) + ۲ = a\sin(\pi bx + \frac{\pi}{۲}) + ۲ = a\cos(\pi bx) + ۲$$

اولاً: $T = \frac{۲\pi}{|\pi b|} = \frac{۲}{|b|} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow |b| = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \boxed{b = \pm\frac{۴}{۳}}$

ثانیاً: $\begin{cases} \frac{max + min}{۲} = ۲ \Rightarrow \frac{max - ۳}{۲} = ۲ \Rightarrow max = ۷ \\ \frac{max - min}{۲} = |a| \Rightarrow |a| = \frac{۷ - (-۳)}{۲} = ۵ \Rightarrow a = \pm ۵ \end{cases}$

با توجه به اینکه تابع، از نوع کسینوسی و در $x = ۰$ صعودی است، $\boxed{a = -۵}$ قابل قبول است و در پایان:

$$۲a + ۳b = \begin{cases} ۲(-۵) + ۳(\frac{۴}{۳}) = -۶ \\ ۲(-۵) + ۳(\frac{-۴}{۳}) = -۱۴ \end{cases}$$

چون کمترین مقدار $۲a + ۳b$ مدنظر است، مقدار -۱۴ را انتخاب می‌کنیم.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۶ گزینه ۳ درست است.

دو طرف معادلهٔ مثلثاتی را ساده می‌کنیم:

در سمت چپ معادله می‌دانیم:

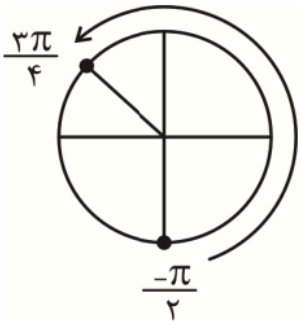
$$\frac{\sin\frac{x}{۲}}{۱+\cos\frac{x}{۲}}=\frac{۱-\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

در سمت راست معادله می‌دانیم:

$$\frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}+\cot\frac{x}{۲}=\frac{۱}{\sin\frac{x}{۲}}+\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{۱+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}$$

پس معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱-\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{۱+\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}\Rightarrow ۱-\cos\frac{x}{۲}=۱+\cos\frac{x}{۲}\Rightarrow\cos\frac{x}{۲}=۰$$



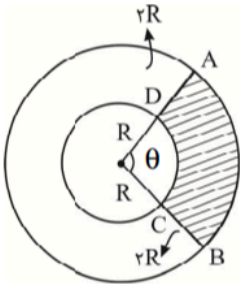
$$-\pi\le x\le\frac{۳\pi}{۲}\Rightarrow\frac{-\pi}{۲}\le\frac{x}{۲}\le\frac{۳\pi}{۴}\rightarrow$$

$$\cos\frac{x}{۲}=۰\Rightarrow\frac{x}{۲}=\begin{cases}-\frac{\pi}{۲}\\ \frac{\pi}{۲}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}-\pi\\ \pi\end{cases}$$

پس قدرمطلق تفاضل جواب‌ها برابر با ۲π است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۷ گزینه ۲ درست است.



$$S_۱=۹S_۲\rightarrow\pi R_۱^۲=۹\times\pi R_۲^۲$$

$$\frac{R_۱}{R_۲}=۳\rightarrow$$ پس شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر ۳ برابر شعاع دایره کوچک‌تر است.

$$\text{محیط رنگی}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CD}+BC+AD=۳R\theta+R\theta+۲R+۲R=۴R\theta+۴R=۴R(۱+\theta)$$

$$\frac{\text{محیط رنگی}}{\text{محیط دایره کوچک}}=\frac{۳}{۱}=\frac{۴R(۱+\theta)}{۲\pi R}\qquad ۳\pi=۲(۱+\theta)\qquad ۳\pi=۲+۲\theta\rightarrow\theta=\frac{۳\pi-۲}{۲}$$

$$\theta=\frac{۳\times۳/۱۴-۲}{۲}=۳/۷۱\text{rad}$$

$$\text{تبدیل درجه به رادیان}\Rightarrow ۳/۷۱\times۵۷/۳\simeq ۲۱۲^\circ$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۸ گزینه ۲ درست است.

با توجه به ناحیه‌ها و تغییر نسبت در حضور $\frac{\pi}{2}$ داریم:

$$\frac{\sin(\overbrace{\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\text{دوم}})+\cos(\overbrace{\alpha-\frac{\pi}{2}}^{\text{چهارم}})}{\sin(\underbrace{\pi+\alpha}_{\text{سوم}})-\cos(\underbrace{\alpha-\pi}_{\text{سوم}})}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}=۴$$

طرفین وسطین:

$$\cos\alpha+\sin\alpha=-۴\sin\alpha+۴\cos\alpha\Rightarrow ۵\sin\alpha=۳\cos\alpha\Rightarrow\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{۵}{۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۹ گزینه ۲ درست است.

با توجه به رابطهٔ $۱+\cos u=۲\cos^۲\frac{u}{۲}$ می‌توان نوشت:

$$۲\cos^۲\frac{x}{۲}\times۲\cos^۲\frac{x}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$\cos^۲\frac{x}{۲}\times\cos^۲\frac{x}{۴}=\frac{۱}{۱۶}\xrightarrow{\times\sin^۲\frac{x}{۴}}\cos^۲\frac{x}{۲}\times\sin^۲\frac{x}{۴}\times\cos^۲\frac{x}{۴}=\frac{۱}{۱۶}\times\sin^۲\frac{x}{۴}$$

$$\cos^۲\frac{x}{۲}\times(\frac{۱}{۲}\times\sin\frac{x}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}\sin^۲\frac{x}{۲}\times\cos^۲\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۱۶}\times\sin^۲\frac{x}{۴}$$

$$\frac{۱}{۴}\times(\frac{۱}{۲}\times\sin x)^۲=\frac{۱}{۱۶}\times\sin^۲\frac{x}{۴}$$

$$\sin^۲x=\sin^۲\frac{x}{۴}\rightarrow x=k\pi\pm\frac{x}{۴}$$

$$\begin{cases}x+\frac{x}{۴}=k\pi\rightarrow\frac{\pi}{۴}x=k\pi\rightarrow x=\frac{۴k\pi}{۵}\\ x-\frac{x}{۴}=k\pi\rightarrow\frac{۳}{۴}x=k\pi\rightarrow x=\frac{۴k\pi}{۳}\end{cases}$$

k	۰	۱	۲	۳
x	۰	$\frac{۴\pi}{۵}$	$\frac{۸\pi}{۵}$	~~$\frac{۱۲\pi}{۵}$~~

k	۰	۱	۲
x	۰	$\frac{۴\pi}{۳}$	~~$\frac{۸\pi}{۳}$~~

جواب‌ها $\{۰,\frac{۴\pi}{۵},\frac{۸\pi}{۵},\frac{۴\pi}{۳}\}$ است. تعداد جواب‌ها ۴ تا می‌باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵۰ **گزینه ۳ درست است.**

$$y = a + \sin(\frac{\pi}{۲} + b\pi x)$$

$$y = a + \cos(b\pi x)$$

$$۲T = ۴ \rightarrow T = ۲$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} \rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{۱} \rightarrow |b| = ۱$$

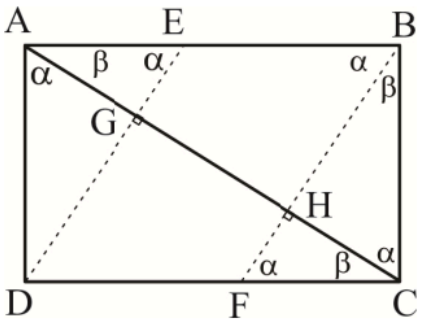
$$b = \pm ۱$$

$$\max = ۳ = a + ۱ \rightarrow a = ۲$$

$$a + b = ۲ \pm ۱ = ۳ \text{ یا } ۱$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵۱ **گزینه ۴ درست است.**



$$\overset{\Delta}{FCB} \sim \overset{\Delta}{CBA}$$

$$\frac{BF}{AC} = \frac{FC}{BC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{FC}{۳} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow FC = \frac{۹}{۴}$$

پس: $DF = ۴ - \frac{۹}{۴} = \frac{۷}{۴}$

و مساحت متوازی‌الاضلاع $EBFD$ برابر است با $\frac{۷ \times ۳}{۴} = \frac{۲۱}{۴}$

مساحت مثلث FHC را هم حساب می‌کنیم. پس مثلث با ABC به نسبت $\frac{FC}{AC} = \frac{\frac{۹}{۴}}{۵}$ متشابه است

پس:

$$S_{FHC} = (\frac{۹}{۲۰})^۲ S_{ABC}$$

$$= \frac{۸۱}{۴۰۰} \times \frac{۳ \times ۴}{۲} = \frac{۸۱ \times ۳}{۲۰۰} = \frac{۲۴۳}{۲۰۰}$$

نسبت آن‌ها می‌شود:

$$\frac{\frac{۲۱}{۴}}{\frac{۲۴۳}{۲۰۰}} = \frac{۲۱ \times \cancel{۲۰۰}^{۵۰}}{\cancel{۴} \times ۲۴۳}$$

که برابر است با: $\frac{۱۰۵۰}{۲۴۳}$ که تقریباً ۴ برابر است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)